KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE entuzjaści edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

RAPORT Z BADANIA

DIAGNOZA UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNYCH UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH DUMa

Autorzy raportu:
Jerzy Janowicz
Jacek Lech
Agnieszka Sułowska

Badanie zostało przygotowane przez zespół Pracowni Matematyki IBE w składzie:
Monika Czajkowska
Marzenna Grochowalska
Jerzy Janowicz
Marcin Karpiński
Jacek Lech
Margaryta Orzechowska
Agnieszka Sułowska
Małgorzata Zambrowska

Statystyczne opracowanie wyników:
Bartosz Kondratek

Recenzenci:
Agata Hoffmann
Henryk Dąbrowski

Wydawca:
Instytut Badań Edukacyjnych
ul. Górczewska 8
01–180 Warszawa
tel. (22) 241 71 00; www.ibe.edu.pl

Skład, druk:
Drukarnia TINTA, Z. Szymański
ul. Żwirki i Wigury 22
13–200 Działdowo
www.drukarniatinta.pl

Publikacja została wydrukowana na papierze ekologicznym.

Publikacja opracowana w ramach projektu systemowego: *Badanie jakości i efektywności edukacji oraz instytucjonalizacja zaplecza badawczego*, współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, realizowanego przez Instytut Badań Edukacyjnych.

Egzemplarz bezpłatny

Spis treści

1. Założenia badania

W diagnozie umiejętności matematycznych (DUMa) wzięli udział uczniowie klasy V szkół podstawowych. Swoją formą i rodzajem użytych zadań diagnoza nawiązywała do sprawdzianu po szkole podstawowej, który w roku 2015 po raz pierwszy będzie oparty na wymaganiach nowej podstawy programowej kształcenia ogólnego.

Od 2009 roku w polskim systemie oświaty wdrażana jest nowa podstawa programowa. W roku szkolnym 2013/2014 była ona po raz pierwszy realizowana w klasach V. W kolejnym roku dotrze do klasy VI szkoły podstawowej. To oznacza, że sprawdzian po szóstej klasie w 2015 r. po raz pierwszy będzie sprawdzał kompetencje dzieci, które od początku swojej edukacji uczyły się według nowej podstawy programowej. Sprawdzian ten będzie miał nową formułę – będzie w nim wydzielona część matematyczna. Będzie on sprawdzał oprócz umiejętności szczegółowych także umiejętności opisane w wymaganiach ogólnych podstawy: umiejętność modelowania matematycznego, tworzenia strategii rozwiązania oraz prowadzenia prostego rozumowania i wnioskowania.

Zestaw zadań użytych w badaniu został tak przygotowany, by jak najlepiej przybliżał typy zadań, z którymi uczniowie mogą spotkać się na sprawdzianie, i co ważniejsze, by sprawdzał takie umiejętności, jakie będą wymagane na sprawdzianie. Z takim założeniem wiążą się pewne trudności. Po pierwsze, jeśli zestaw zadań ma być jak najbardziej podobny do zadań na sprawdzianie, to muszą one dotyczyć również tych działów, które często realizowane są dopiero w VI klasie. Należy do nich na przykład geometria przestrzenna. Nieobecność w zestawie zadań dotyczących tej tematyki mogłaby zostać mylnie odczytana jako sygnał, że takich zadań nie będzie również na sprawdzianie. Co więcej, należy uświadomić sobie, że podstawa programowa nie określa, w której klasie uczniowie realizują które zagadnienia. Może się więc zdarzyć, że uczniowie uczący się według jednego programu nauczania, zrealizowali dział dotyczący geometrii przestrzennej już w V klasie, ale za to nie nauczyli się jeszcze działań na liczbach ujemnych, natomiast w innym programie działy te ułożone są odwrotnie. Dlatego dobranie do zestawu takich zadań, które będą dostępne dla wszystkich uczniów klas V w całej Polsce było praktycznie niemożliwe. Próba przygotowania takiego zestawu oznaczałaby rezygnację z podstawowego założenia, że badanie ma na tyle wiernie, na ile jest to możliwe, nawiązywać do sprawdzianu.

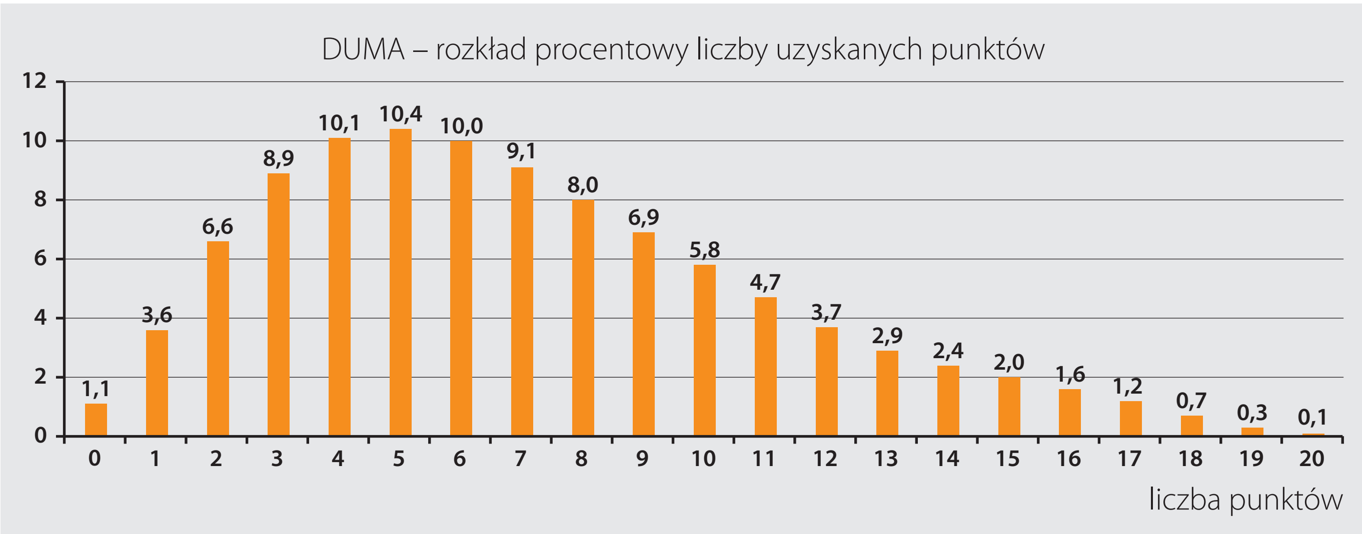
Badanie DUMa było bezpłatne, a udział w nim był dobrowolny. Po zakończeniu badania i ocenieniu przez nauczycieli rozwiązań uczniowskich zgodnie z dostarczonym szkołom schematem oceniania i wprowadzeniu danych o rozwiązaniach do programu komputerowego, szkoła otrzymała informacje o wynikach uczniów poszczególnych oddziałów, a także o wynikach uczniów całej szkoły na tle całej populacji uczniów biorących udział w badaniu, na tle danego województwa oraz na tle innych miejscowości (wieś, miasto do 10 tys. mieszkańców, miasto powyżej 10 tys. mieszkańców, miasto powyżej 100 tys. mieszkańców).

2. Ogólne wyniki badania

W badaniu DUMa wzięło udział 6275 szkół podstawowych z terenu całej Polski. W szkołach tych zestaw zadań matematycznych rozwiązywało łącznie 181 482 uczniów klas V. Przytoczone liczebności odpowiadają 60,2% wszystkich szkół podstawowych oraz 55,2% wszystkich uczniów klas piątych (na podstawie danych z bazy SIO). Ponieważ, zgodnie z założeniami, udział szkół w badaniu był dobrowolny, nie była to próba ani losowa, ani celowa, ale jej liczebność jest tak duża, że pozwala uznać wyniki uzyskane w badaniu za miarodajne dla całej populacji.

W rozwiązywanym przez uczniów zestawie znajdowało się 15 zadań. Wśród nich było 12 zadań zamkniętych punktowanych w skali 0–1, dwa zadania otwarte punktowane w skali 0–2 i jedno zadanie otwarte punktowane w skali 0–4. Za rozwiązanie wszystkich zadań można było uzyskać 20 punktów.

Okazało się, że za rozwiązanie całego zestawu uczniowie klasy piątej otrzymali średnio 35,3% możliwych do zdobycia punktów – średni wynik ucznia wyniósł 7,1 punktu na 20 możliwych. Na wykresie poniżej przedstawiono rozkład uzyskanych punktów.



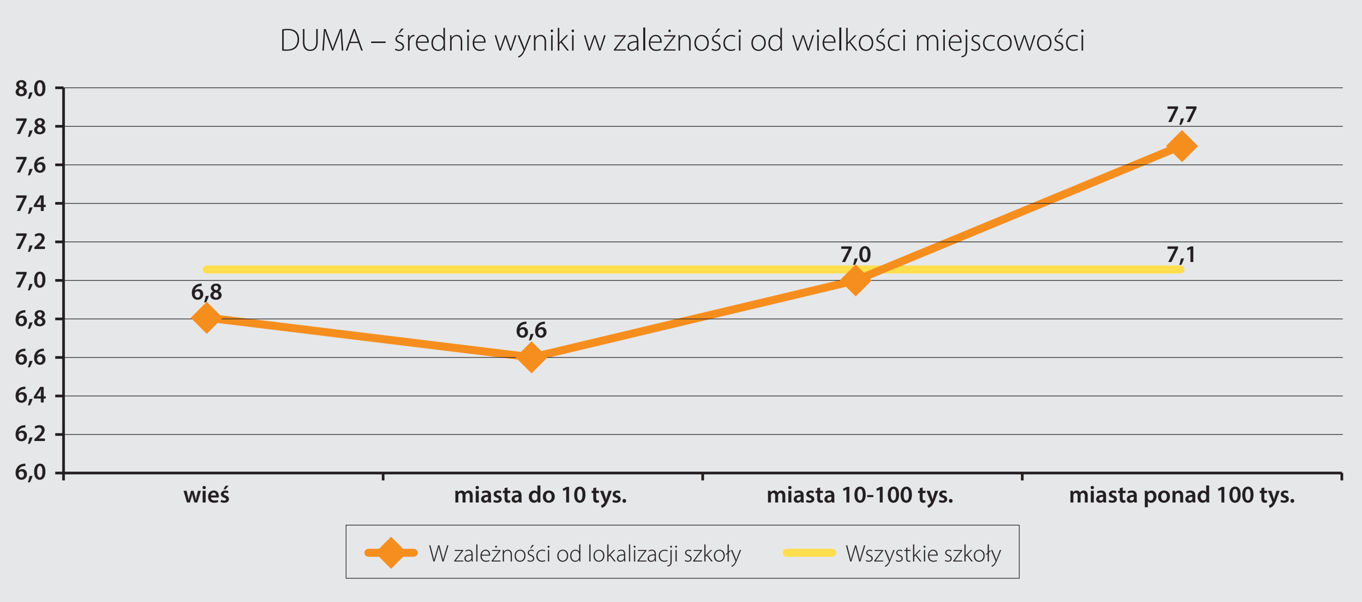
Najwięcej uczniów uzyskało 5 punktów na 20 możliwych, podobne odsetki uczniów zdobyły 4 lub 6 punktów. Mediana tego rozkładu wynosi 6 punktów. Oznacza to, że połowa wszystkich uczniów uczestniczących w badaniu uzyskała wynik niższy lub równy 6 punktów.

Ponad 1% uczniów biorących udział w badaniu (2073 uczniów) nie rozwiązał ani jednego zadania i uzyskał 0 punktów. Zaledwie 1 na 1000 uczniów zdobył maksymalną liczbę punktów. Takich uczniów było w Polsce 118.

Za rozwiązanie zadań zamkniętych uczniowie uzyskiwali średnio 4,9 punktu na 12 możliwych, co stanowi 40,9% punktów, a za zadania otwarte 2,1 punktu na 8 możliwych, czyli 26,8%. Potwierdziła się zatem znana prawidłowość, że zadania otwarte są dla uczniów zacznie trudniejsze niż zamknięte.

Osiągnięte wyniki mogą wydawać się bardzo słabe. Nie należy jednak zapominać, że uczniowie, którzy brali udział w badaniu mają przed sobą jeszcze cały rok nauki, zanim przystąpią do sprawdzianu. Dlatego wyniki osiągnięte przez konkretnych uczniów i konkretne oddziały powinny raczej służyć nauczycielom do oceny słabych i mocnych stron ich uczniów. Ważne jest, aby nauczyciele przeanalizowali wspólnie z uczniami popełnione przez nich błędy, wspólnie zastanowili się nad ich przyczynami, a następnie tak zaplanowali pracę w klasie VI, aby pod koniec nauki w szkole podstawowej jak najwięcej uczniów mogło wykazać się wszystkimi umiejętnościami określonymi przez podstawę programową jako cele nauczania matematyki – umiejętnością modelowania matematycznego, tworzenia strategii rozwiązania oraz prowadzenia prostego rozumowania i wnioskowania.

Także nauczyciele klas, które nie brały udziału w badaniu mogą skorzystać z jego wyników, sprawdzając jak ich uczniowie radzą sobie z opisanymi tutaj zadaniami badającymi określone umiejętności i zwracając szczególną uwagę na zasygnalizowane problemy.
Na kolejnym wykresie przedstawiono średnie wyniki uzyskane w badaniu w zależności od lokalizacji szkół.



Najwyższy wynik uzyskali uczniowie z dużych miast, a najniższy uczniowie z małych miast – różnica wynosi 1,1 punktu. Ponieważ odchylenie standardowe dla wyniku sumarycznego wynosi 4,0 punkty, to różnica ta stanowi ponad 1/4 odchylenia standardowego uzyskanych wyników. Natomiast średnie wyniki uczniów uczęszczających do szkoły na wsi, w małych i średnich miastach są do siebie bardzo zbliżone.
Także jeśli przyjrzymy się zróżnicowaniu wyników wewnątrz każdej kategorii miejscowości okazuje się, że wsie oraz małe i średnie miasta nie różnią się od siebie – zarówno mediana wyników, jak i 1 i 3 kwartyl są identyczne. Bardziej zróżnicowane były tylko wyniki w dużych miastach – tam więcej uczniów osiągało wyższe wyniki.

Wynik w punktach w poszczególnych kwartylach w zależności od wielkości miejscowości

Warstwa	1 kwartyl	mediana	3 kwartyl
wieś	4	6	9
miasta do 10 tys.	4	6	9
miasta 10–100 tys.	4	6	9
miasta ponad 100 tys.	4	7	10

3. Wnioski ogólne z badania

Pierwsze wymaganie ogólne opisane w podstawie programowej to **sprawność rachunkowa**. Wymaganie to było sprawdzane tylko przez dwa zadania z zestawu, choć oczywiście umiejętność wykonywania prostych działań arytmetycznych była wykorzystywana także w wielu innych zadaniach. Uczniowie zdobyli w tym obszarze 46% możliwych do uzyskania punktów. Okazało się, że umiejętność porównywania ułamków zwykłych jest przez uczniów lepiej opanowana (57% poprawnych odpowiedzi) niż umiejętność wykonywania działań na ułamkach dziesiętnych (tylko 35% poprawnych odpowiedzi). Takie wyniki świadczą o tym, że sprawność rachunkowa, która jest jedną z podstawowych umiejętności używanych w codziennym życiu oraz jest podstawą do uczenia się matematyki na dalszych etapach kształcenia, nie jest jeszcze opanowana przez piątoklasistów w stopniu wystarczającym.

Kolejną sprawdzaną umiejętnością było **wykorzystanie i tworzenie informacji**. Uczniowie uzyskali 49% z 6 punktów możliwych do zdobycia w tym obszarze. Z analizy wyników uzyskiwanych w poszczególnych zadaniach wynika, że umiejętnością dobrze opanowaną przez większość uczniów jest odczytywanie pojedynczych informacji podanych w tekście zadania, na diagramie lub w tabeli. Jednak już odczytanie wielu informacji podanych w kilku źródłach (w tekście zadania, na diagramie, w tabeli, na schemacie), a następnie właściwe ich połączenie i wykorzystanie przekracza możliwości znacznej części uczniów klasy V. Można również powiedzić, że uczniowie nieźle radzą sobie z posługiwaniem się informacjami w sytuacjach prostych, typowych. Nieco gorzej jest, gdy należy odczytać informacje podane w nietypowej formie (np. tabela w zadaniu o tenisie).

Następne wymaganie ogólne podstawy programowej, którego opanowanie było sprawdzane w badaniu to u**miejętność modelowania matematycznego**, czyli m.in. dobrania modelu matematycznego do opisanej w zadaniu sytuacji czy przetworzenia tekstu zadania na odpowiednie działania arytmetyczne. Okazało się, że wszystkie zadania dotyczace tego obszaru były poprawnie rozwiązywane przez bardzo podobny odsetek uczniów – łatwość tych zadań wynosiła od 40% do 45%. Tak podobne wyniki we wszystkich zadaniach zdają się świadczyć, że na poziomie klasy V taki właśnie odsetek uczniów posiada już umiejętność modelowania.

Ostatnie wymaganie ogólne postawione w podstawie programowej przed uczniami szkoły podstawowej to **umiejętność rozumowania i tworzenia strategii**. Okazało się, że jest to umiejętność bardzo słabo opanowana przez piątoklasistów. Prawie 70% uczestniczących w badaniu uczniów uzyskało w zadaniach z tej kategorii 0 lub 1 punkt na 7 możliwych. Oznacza to, że nie potrafili oni ani zaplanować i wykonać kolejnych kroków w rozwiązaniu wieloetapowego zadania, ani przyswoić kilku informacji, które należało jednoczenie wziąć pod uwagę, a następnie wyciągnąć z nich wnioski. Tylko kilkanaście procent uczniów radzi sobie dość dobrze lub bardzo dobrze z tego rodzaju problemami.

W części szczegółowej raportu, po każdym z rozdziałów dotyczących poszczególnych wymagań ogólnych, sformułowane zostały rekomendacje, które mogą pomóc nauczycielom w uczeniu i rozwijaniu u uczniów omawianych umiejętności.

4. Wprowadzenie do części szczegółowej raportu

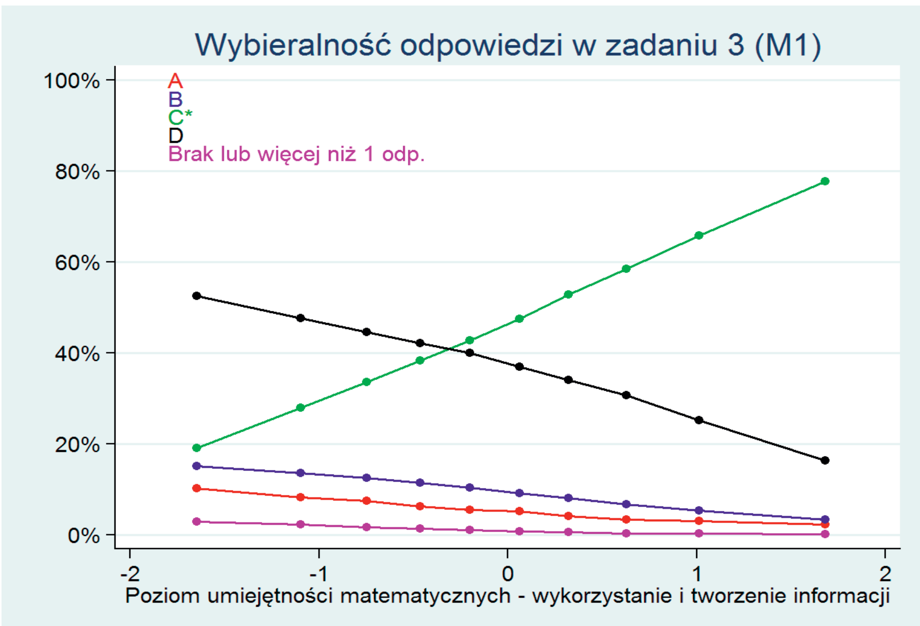
W dalszej części raportu zostaną omówione poszczególne zadania i uzyskane w nich wyniki. Zadania zostaną przedstawione w podziale na umiejętności ogólne opisane w podstawie programowej dla szkoły podstawowej:

I. Sprawność rachunkowa.
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
III. Modelowanie matematyczne.
IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Omawiając każde zadanie przedstawione zostaną:

- treść zadania
- wymagania ogólne i szczegółowe, których dotyczy dane zadanie
- omówienie zadania i sposobów jego rozwiązania
- wyniki uzyskane w danym zadaniu i ich interpretacja
- rekomendacje dla nauczycieli do dalszej pracy z uczniami.

W zadaniach otwartych (13, 14 i 15) przedstawione zostaną również schematy oceniania, według których nauczyciele oceniali prace swoich uczniów.
Po omówieniu wszystkich zadań reprezentujących dane wymaganie, ogólne przedstawiony zostanie łączny wynik wszystkich zadań z tego obszaru i interpretacja umiejętności uczniów w tym obszarze.
Uczniowie biorący udział w badaniu, rozwiązywali dwie wersje zestawu zadań: M1 i M2. Zadania w obu wersjach zestawu były analogiczne – różniły się tylko danymi liczbowymi użytymi w zadaniu lub kolejnością proponowanych odpowiedzi. Ogólne wyniki badania omówione powyżej są połączonymi wynikami dla obu wersji testu. Natomiast w rozdziale prezentującym poszczególne zadania i ich omówienia, użyte zostaną zadania z wersji M1 oraz wyniki uczniów rozwiązujących tę wersję testu.
W omówieniach zadań posługujemy się wykresami procentowymi, na których przedstawiono, jak często poszczególne odpowiedzi wybierali uczniowie o różnym poziomie umiejętności matematycznych. Oto przykład takiego wykresu:



Na osi poziomej umieszczone są grupy (decyle) uczniów o rosnącym poziomie umiejętności matematycznych w zakresie sprawdzanego przez dane zadanie wymagania ogólnego, w tym przypadku: wykorzystania i tworzenia informacji. Zero oznacza uczniów o średnim poziomie umiejętności, im bardziej na lewo, tym uczniowie słabsi, im bardziej na prawo – tym lepsi. (Jednostka użyta na osi poziomej to odchylenie standardowe.)

Na osi pionowej zaznaczono odsetek uczniów z danego decyla wybierających każdą z proponowanych w zadaniu odpowiedzi. Każda z odpowiedzi zaznaczona jest innym kolorem, odpowiedź poprawna oznaczona jest gwiazdką.

Z przedstawionego powyżej wykresu można odczytać, że spośród uczniów z pierwszego decyla (skrajne kropki z lewej strony wykresu), czyli spośród uczniów o najniższych umiejętnościach, najwięcej – około 55% uczniów – wybrało niepoprawną odpowiedź D. Poprawna odpowiedź C została wybrana tylko przez około 20% uczniów z tej grupy. Pozostałe dwie odpowiedzi były wybierane przez mniej niż 20% uczniów. Najmniej było uczniów, którzy nie udzielili żadnej odpowiedzi lub zaznaczyli więcej niż jedną odpowiedź.

W kolejnej grupie (decylu) zmniejszył się odsetek uczniów wybierających niepoprawną odpowiedź D i znacznie zwiększył się odsetek wybierających poprawną odpowiedź C. Pozostałe odpowiedzi pozostały na podobnym poziomie, jak wśród słabszych uczniów.

Jeśli spojrzymy na prawą stronę wykresu, zobaczymy, że w najwyższym decylu, czyli wśród uczniów najlepszych, już prawie 80% wybrało poprawną odpowiedź C, ale nadal prawie 20% wskazało niepoprawną odpowiedź D. Pozostałe odpowiedzi są wybierane przez bardzo niewielu uczniów.

5. Część szczegółowa raportu – omówienie zadań

5.1. I wymaganie ogólne: Sprawność rachunkowa

„Uczeń wykonuje proste działania pamięciowe na liczbach naturalnych, całkowitych i ułamkach, zna i stosuje algorytmy działań pisemnych oraz potrafi wykorzystać te umiejętności w sytuacjach praktycznych".

Ten obszar obejmuje umiejętności bardzo elementarne, które ze względu na ich funkcjonalność można określić jako „narzędziowe". Sprawność rachunkowa jest umiejętnością wspomagającą wiele innych aktywności nie tylko w zakresie matematyki, ale również w różnych sytuacjach praktycznych. Jest więc ona nie tylko elementem wykształcenia matematycznego, ale także umiejętnością warunkującą sprawne funkcjonowanie w społeczeństwie, stanowi bazę nie tylko dla dalszego uczenia się matematyki, ale także, a może nawet przede wszystkim, dla ogólnego rozwoju intelektualnego i socjalnego młodego człowieka.

Kompetencje rachunkowe są kształcone od najwcześniejszych lat, ale kulminacja następuje w szkole podstawowej. To tu jest miejsce na zapoznanie uczniów z podstawowymi algorytmami i doprowadzenie do tego, aby stały się czynnościami wykonywanymi machinalnie, niemal bez zastanowienia. Brak sprawności rachunkowej może opóźniać lub wręcz blokować osiąganie kolejnych poziomów wiedzy matematycznej. Może tak się stać, gdy rachunki będą dla ucznia główną trudnością podczas rozwiązywania problemu, zastępując pracę nad tym problemem. Stąd wysoka ranga sprawności rachunkowej jako jednego z celów kształcenia w szkole podstawowej. Edukacja matematyczna w gimnazjum nie odcina się od kształcenia tej sprawności, ale nie ma tu już właściwie czasu lekcyjnego na kształcenie podstawowych umiejętnościach rachunkowych. Uczniowie na drugim etapie kształcenia powinni zatem opanować te umiejętności na co najmniej dobrym poziomie, aby ich brak nie stanowił przeszkody w poznawaniu kolejnych elementów wiedzy matematycznej.

Umiejętności zawarte w tym obszarze sprawdzane są przez dwa zadania z zestawu – zadania 1. i 2.

Zadanie 1. „Ułamki"

Na tablicy zapisano cztery liczby: $\frac{10}{7}, \frac{17}{5}, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}$.

Ile spośród tych liczb jest większych niż 2 i mniejszych niż 3?

A. Żadna. B. Jedna. C.* Dwie. D. Trzy. E. Wszystkie.

Wymagania ogólne:

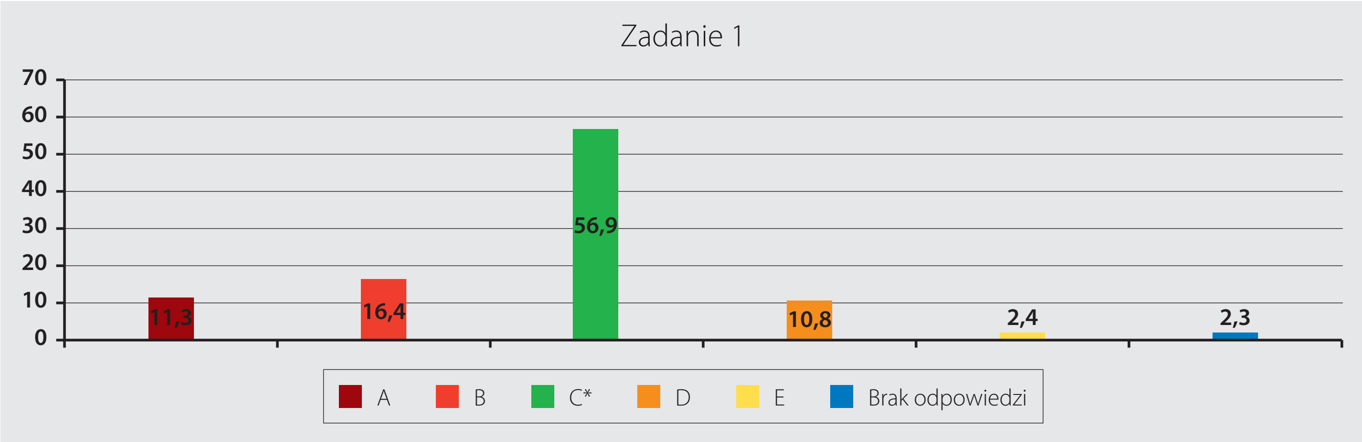
I. Sprawność rachunkowa.

Wymagania szczegółowe:

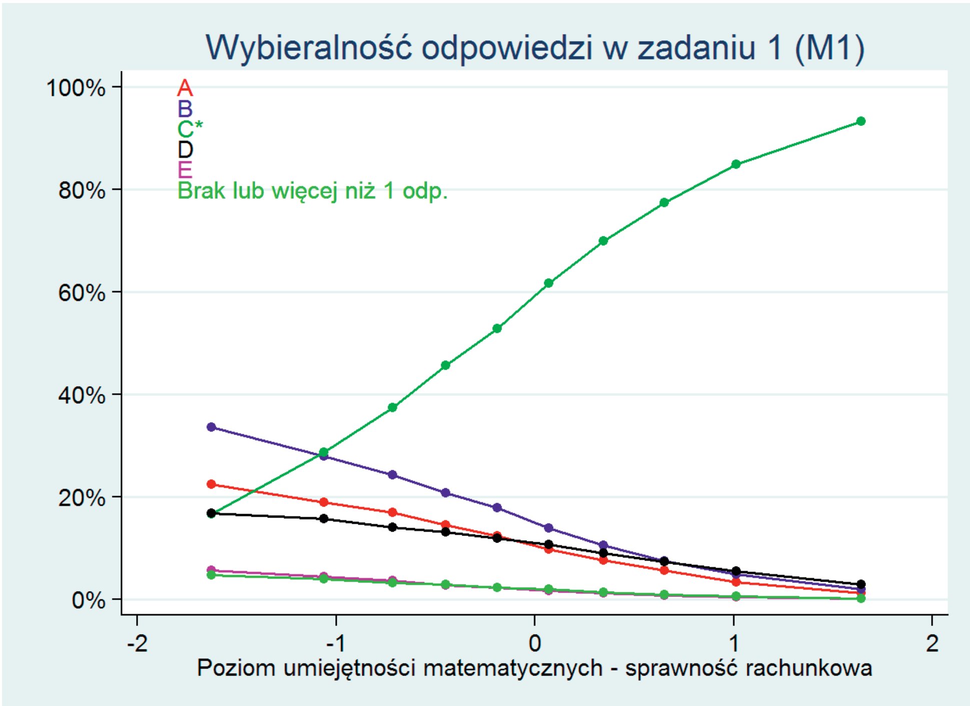
4. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:

   12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne).

Zadanie polegało na porównaniu kilku ułamków z liczbami 2 i 3. Uczniowie mogli to zrobić na kilka sposobów. Większość uczniów z ułamków wyłączała całości. Można było również sprowadzić te ułamki do postaci dziesiętnej, dzieląc licznik przez mianownik. Być może znaleźli się też tacy, którzy zauważyli, że wystarczy pomnożyć mianownik przez 2 i 3 i porównać otrzymane wyniki z licznikiem.



Z wykresu widać, że zdecydowana większość uczniów wybrała poprawną odpowiedź.
Wśród błędnych odpowiedzi najczęściej wybierana była odpowiedź B (Jedna). Uczniowie, którzy wybrali tę odpowiedź rozpoznali jedną z liczb spełniających warunki zadania, ale nie przeprowadzili rzetelnej analizy pozostałych liczb. Z kolei uczniowie, którzy wybrali odpowiedź D (Trzy) prawdopodobnie nie porównali podanych ułamków z obiema danymi liczbami 2 i 3 i sprawdzili tylko jeden z warunków. Pozostałe błędne odpowiedzi (A i E) być może wybierali uczniowie, którzy nie rozumieli polecenia lub nie umieli z ułamków wyłączać całości ani porównywać ułamków z liczbą całkowitą.



Wykres pokazuje, że dla uczniów najlepszych zadanie było bardzo łatwe – poprawnie rozwiązało je prawie 95% spośród nich. Natomiast uczniowie najsłabsi mieli z z tym zadaniem problem – poprawnej odpowiedzi udzieliło niespełna 20% z nich.

Rekomendacje

Porównywanie ułamków i zapisywanie ich w różnych postaciach jest typową, zwykle dobrze opanowaną przez uczniów umiejętnością. Zachęcamy jednak nauczycieli do pokazywania uczniom różnych sposobów porównywania ułamków i pomocy im w wyborze sposobu najefektywniejszego w danej sytuacji. Zachęcamy także nauczycieli do przeanalizowania wspólnie z uczniami popełnionych przez nich błędów oraz przyczyn, dla których takie właśnie błędy popełnili.

5.1. I wymaganie ogólne: Sprawność rachunkowa

Zadanie 2. „Działania"

Które stwierdzenie **nie jest** prawdziwe?

A. $0{,}21 = 0{,}210$

B. * $2{,}35 \cdot 10 = 2{,}350$

C. $5{,}04 + 0{,}2 < 5{,}02 + 0{,}4$

D. $0{,}1101 > 0{,}1011$

Wymagania ogólne:

I. Sprawność rachunkowa.

Wymagania szczegółowe:

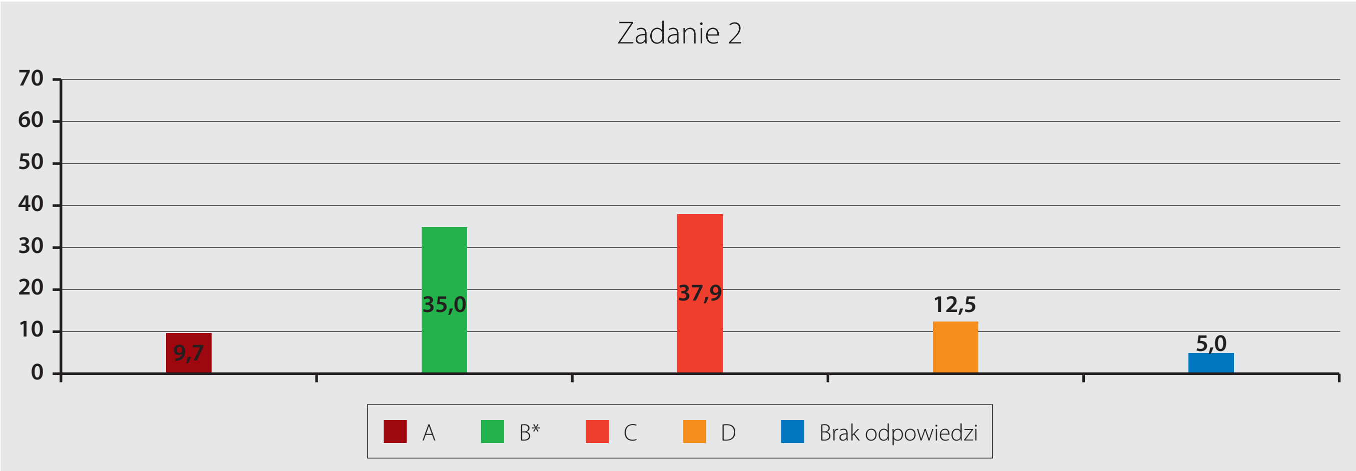
4. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:

   12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne).

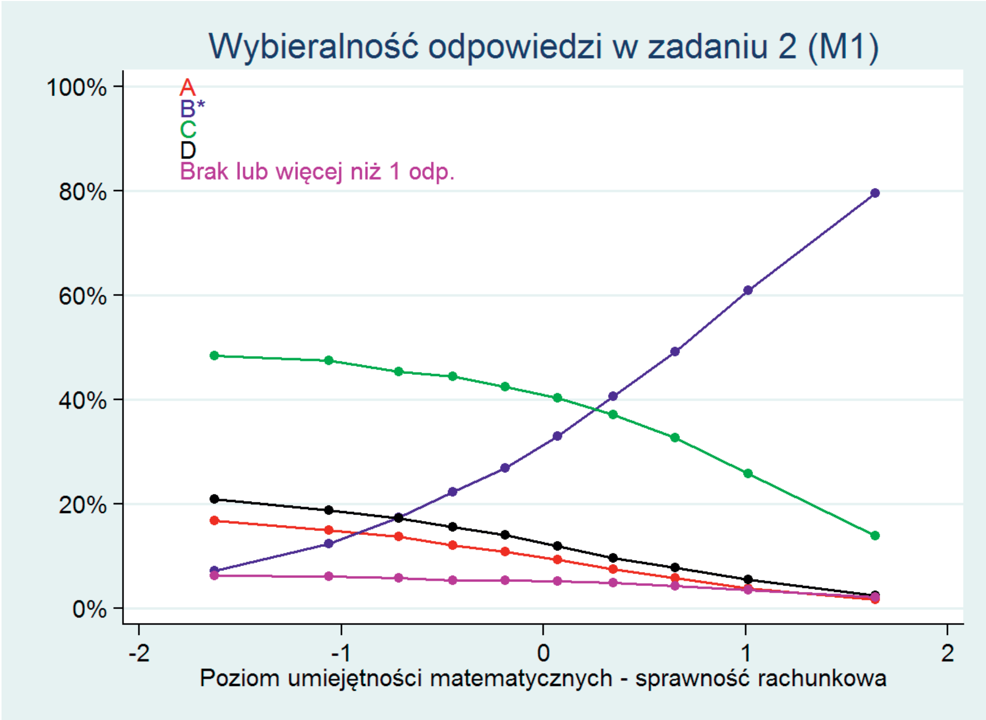
5. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:

   2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w najprostszych przykładach), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach).

Poprawne rozwiązanie tego zadania wymaga wykonania prostych działań na liczbach zapisanych w postaci dziesiętnej oraz porównania takich liczb. Istotna trudność zadania wynika z faktu, że składa się ono faktycznie z czterech zadań rachunkowych – aby świadomie wybrać dobrą odpowiedź, czyli wskazać niepoprawnie wykonane działanie, najlepiej byłoby poprawnie wykonać wszystkie cztery działania.



W wynikach tego zadania zwraca uwagę bardzo wysoki odsetek uczniów wskazujących na odpowiedź C – aż 38%. Tę błędną odpowiedź wybierało więcej uczniów niż odpowiedź właściwą.



Z powyższego wykresu widać, że odpowiedź C była najczęściej wybieraną niepoprawną odpowiedzią zarówno przez uczniów najsłabszych, jak i najlepszych. Prawdziwość nierówności zapisanej w tej odpowiedzi można było poprawnie ocenić na dwóch „poziomach": albo po prostu wykonując działania po obu stronach nierówności i porównując otrzymane liczby, albo wykazując się dobrym rozumieniem ułamków dziesiętnych oraz idei dodawania – wtedy faktyczne znajdowanie sum nie było potrzebne.

Warto zauważyć też, jak rzadko poprawna odpowiedź B była wybierana wśród uczniów słabych i średnich – wśród uczniów najsłabszych była ona stanowczo najrzadziej wybieraną odpowiedzią spośród wszystkich proponowanych (ok. 5%). Dopiero uczniowie o umiejętnościach wyższych niż średnie (siódmy decyl) częściej wybierali poprawną odpowiedź B niż niepoprawną C.

Uczniowie, którzy w tym zadaniu wybrali niepoprawną odpowiedź, popełnili tak naprawdę co najmniej dwa błędy: nie zauważyli błędu w stwierdzeniu B i uznali za błędne jedno ze stwierdzeń, które były poprawne. Dlatego suma wszystkich niepoprawnych wyborów uczniów wskazuje, że aż 62% uczniów nie zauważyło błędu w mnożeniu ułamka dziesiętnego przez 10, co powinno być jedną z podstawowych umiejętności. Tłumaczyć ten fakt może uczniowska nieuwaga i powierzchowna analiza przykładu (być może wielu zinterpretowało zapis jako mnożenie liczby całkowitej przez 10).

Rekomendacje

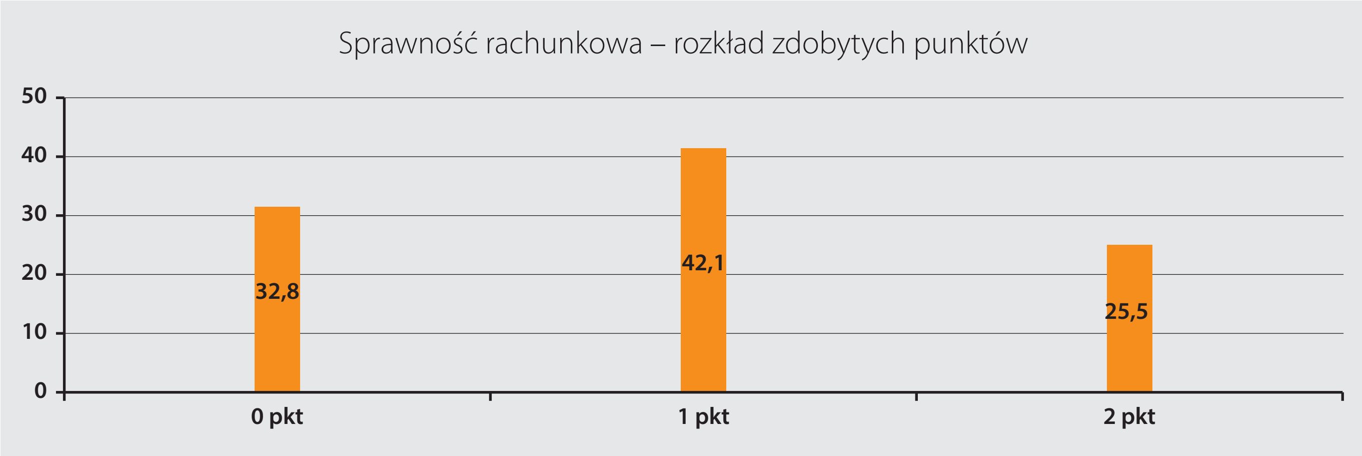
Umiejętności wykorzystywane w tym zadaniu można poprawić, ćwicząc z uczniami jak najbardziej różnorodne operacje na liczbach dziesiętnych tak, aby każdy uczeń miał możliwość wypracowania swoich własnych sposobów wykonywania działań i nabył sprawności w ich dobieraniu. Warto także, oprócz standardowych ćwiczeń rachunkowych, rozwiązywać z uczniami takie zadania, które pogłębiają zrozumienie sensu działań i zapisu liczb.

Sprawność rachunkowa. Podsumowanie

W zadaniach sprawdzających sprawność rachunkową uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 2 punkty. Wykres poniżej pokazuje rozkład uzyskanych punktów.

Niemal połowa uczniów rozwiązała jedno z dwóch zadań w tym obszarze. Dwa punkty zdobył co czwarty uczeń – rozwiązali oni poprawnie oba zadania. Niestety, co trzeci piątoklasista nie rozwiązał poprawnie w całości ani jednego z tych dwóch zadań. Średnio uczniowie zdobyli w tym obszarze 46% możliwych do uzyskania punktów.

Takie wyniki świadczą o tym, że sprawność rachunkowa, która jest jedną z podstawowych umiejętności używanych w codziennym życiu oraz jest podstawą do uczenia się matematyki na dalszych etapach kształcenia nie jest jeszcze opanowana przez piątoklasistów w stopniu wystarczającym.



Wnioski i rekomendacje

Prowadzenie procesu dydaktycznego w szkole podstawowej tak, aby wszyscy uczniowie osiągnęli zadowalający poziom sprawności rachunkowej nie jest łatwe. W organizacji dydaktyki z pewnością może pomoc zwrócenie uwagi na indywidualne różnice rozwojowe – jeszcze na poziomie szkoły podstawowej bardzo widoczne. W ślad za tą obserwacją powinna pójść jak najdalej posunięta indywidualizacja oddziaływań edukacyjnych – zarówno w sferze samych metod nauczania, jak i w zakresie motywacji. Wiedza o liczbach i działaniach na nich dla jednych uczniów jest systemem, po którym poruszają się z łatwością, dla innych natomiast są to oderwane od siebie „wysepki wiedzy", które nie łączy żadna analogia. Dlatego niezbędne są działania scalające te cząstki wiedzy w spójną konstrukcję.

Samo rozumienie liczb naturalnych jest na tym poziomie dobrze wykształcone, gdyż nimi uczniowie posługują się najdłużej. Znacznie gorzej jest z liczbami ujemnymi (struktura zbioru, działania) oraz z ułamkami. Z obserwacji uczniów klas IV–VI wynika również, że nie wszyscy mają we właściwy sposób opanowaną istotę ułamka. Główną przyczyną jest formalizm w postrzeganiu tego pojęcia: ułamek to dwie liczby przedzielone kreską. Wynika to najczęściej ze zbyt szybkiego odejścia od ułamka jako reprezentanta określonej sytuacji realnej do suchego zapisu liczby wymiernej. Część słabszych uczniów, nawet szóstoklasistów, którzy nie zdołali przyswoić go we właściwy sposób jako uogólnienia, abstraktu, radzą sobie po swojemu, wpadając we wspomniany formalizm, czego objawem jest np. dodawanie według schematu „Licznik do licznika, mianownik do mianownika". Źle rozumiana istota ułamka skutkuje niezrozumieniem dodawania, a tym bardziej mnożenia. Ucząc tych działań należy zatem przejść drogę od konkretu do uogólnienia – konkretne sytuacje należy analizować tak długo, aż uczniowie sami wyabstrahują sobie odpowiednie, poprawne schematy.

Słaby wynik w zadaniu dotyczącym ułamków dziesiętnych wskazuje na braki w umiejętnościach uczniów w zakresie działań na takich liczbach. Uczniowie ci potrzebują głębszego zrozumienia zasad działań i większej liczby różnorodnych ćwiczeń arytmetycznych. Wydaje się, że obserwowana gdzieniegdzie tendencja lekceważenia umiejętności wykonywania obliczeń (pamięciowych i pisemnych), tłumaczona postępującą popularnością i dostępnością kalkulatorów i komputerów, jest krótkowzroczna. Bez dobrego ugruntowania podstawowych umiejętności rachunkowych nie tylko nie można rozwiązać wielu matematycznych problemów praktycznych, ale, co ważniejsze, trudno zdobywać matematyczną wiedzę na kolejnych etapach nauczania.

5.2. II wymaganie ogólne: Wykorzystanie i tworzenie informacji

„Uczeń interpretuje i przetwarza informacje tekstowe, liczbowe, graficzne, rozumie i interpretuje odpowiednie pojęcia matematyczne, zna podstawową terminologię, formułuje odpowiedzi i prawidłowo zapisuje wyniki".

Uczniowie od najmłodszych lat funkcjonują w społeczeństwie, w którym bardzo ważną rolę odgrywa informacja. Z pewnością piąto- i szóstoklasiści jeszcze nie uświadamiają sobie tego faktu, ale przez system edukacyjny powinni być do tego przygotowywani. Umiejętność selekcji: ważne – nieważne, prawdziwe – nieprawdziwe, przydatne – nieprzydatne jest dla nich umiejętnością trudną, niemniej jednak tylko rozłożone w czasie, systematyczne wdrażanie ich do operowania informacją, zapewni im swobodę w dokonywaniu właściwych wyborów.

Operowanie informacją to nie tylko praca z gotowym zestawem danych. To także umiejętne tworzenie takich zestawów – zestawień, tabel, diagramów. Ważna jest także znajomość podstawowej terminologii i umiejętność poprawnego formułowania spostrzeżeń, wniosków i odpowiedzi.

Umiejętności zawarte w tym obszarze sprawdzane były przez pięć zadań z zestawu – zadania 3, 4, 7, 8 i 14.

Zadanie 3. „Kino"

Na widowni kina w każdym rzędzie jest po 15 miejsc. Uczniowie szkoły w Kocich Łapkach zajęli wszystkie miejsca od początku rzędu XI do końca rzędu XIV. Ile miejsc zajęli ci uczniowie?

A. 90 B. 75 C.* 60 D. 45

Wymagania ogólne:
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

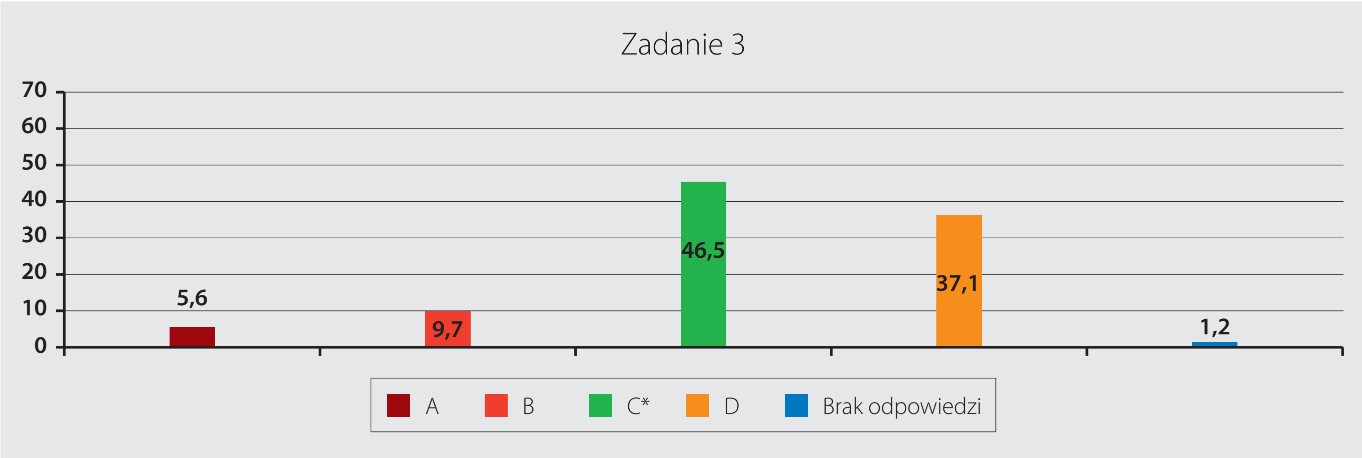
Wymagania szczegółowe:
1. Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:
   5) liczby w zakresie do 30 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim.
2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
   3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową pisemnie, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach).
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
   1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe.

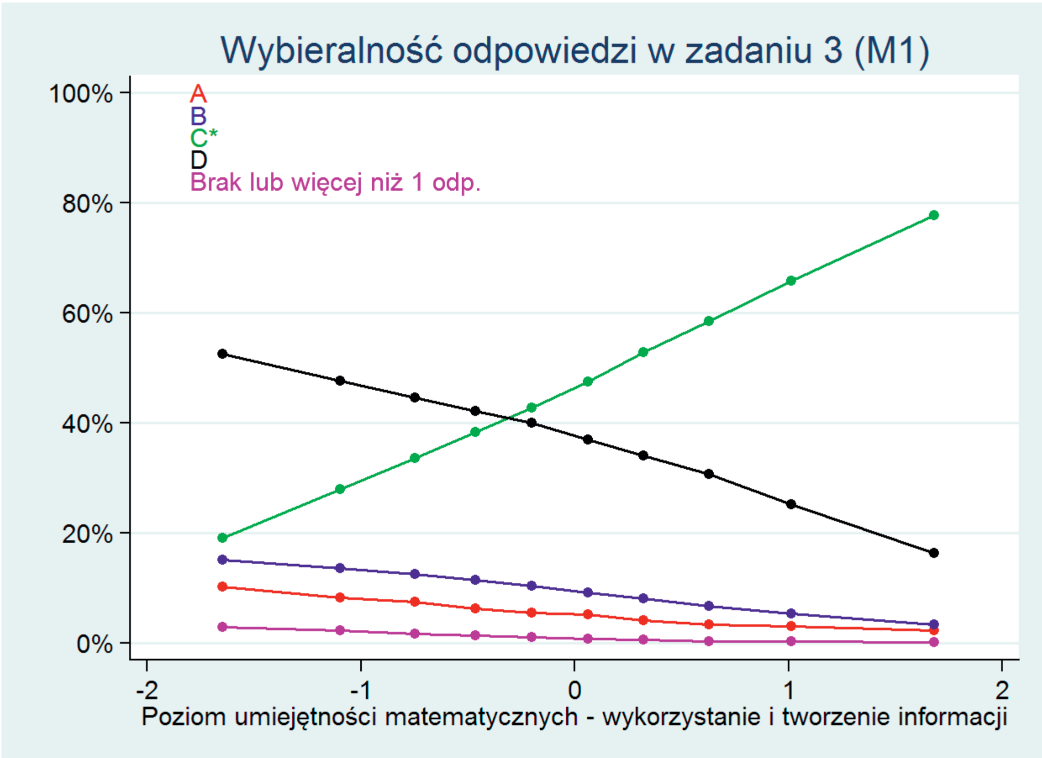
Aby poprawnie wykonać to zadanie, uczeń musi znać rzymski sposób zapisu liczb. Jednak równie istotne jest uważne przeczytanie wszystkich informacji, dobre ich zrozumienie i umiejętność przełożenia ich na właściwe działanie matematyczne.

Niemal połowa uczniów udzieliła w tym zadaniu poprawnej odpowiedzi. Wśród odpowiedzi błędnych najczęściej wybierana była odpowiedź D. Uczniowie, którzy ją wybierali, prawdopodobnie popełnili błąd polegający na mechanicznym odjęciu od siebie dwóch liczb występujących w zadaniu: 14 – 11 = 3, co prowadziło do „zgubienia" rzędu XI. Podobny błąd pojawia się bardzo często w rozwiązaniach zadań dotyczących obliczeń zegarowych lub kalendarzowych.

Niewielka grupa uczniów wybrała odpowiedź A. Ich błąd prawdopodobnie wynikał z tego, że nie potrafili poprawnie odczytać liczby XIV i odczytali ją jako 16. Większa była grupa, która wybrała odpowiedź B. Ten wybór może być rezultatem popełnienia obu wymienionych wyżej błędów (XIV odczytane jako 16 i zgubienie rzędu).

Okazuje się zatem, że znacznie mniej było uczniów, którzy nie potrafili poprawnie odczytać liczb zapisanych w systemie rzymskim (odpowiedzi A i B – łącznie 15,3% uczniów) niż tych, którzy mieli problem z dobraniem odpowiedniego działania arytmetycznego do odczytanych danych (odpowiedzi B i D – łącznie 46,8% uczniów). Zatem porażki uczniów w tym zadaniu częściej były wynikiem braku umiejętności modelowania (dobrania odpowiedniego modelu do opisanej sytuacji) niż umiejętności odczytania i wykorzystania podanej informacji.





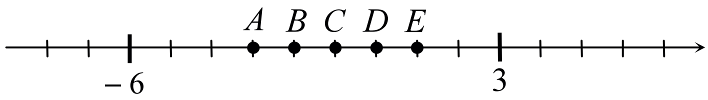
Wykres jeszcze raz, w inny sposób, pokazuje, jak popularna była błędna odpowiedź D: wybrało ją ponad 50% uczniów najsłabszych i prawie 20% uczniów najlepszych. Z kolei poprawną odpowiedź C wybierało zaledwie 20% uczniów najsłabszych i prawie 80% najlepszych.

Rekomendacje

Omawiając to zadanie z uczniami, warto w pierwszej kolejności ustalić, czy ich błędy wynikały z niepoprawnego odczytania numeru rzędu czy też zgubienia rzędu. W pierwszym przypadku wystarczy odświeżyć umiejętności związane z rzymskim zapisem liczb. W drugim przypadku można rozwiązać z uczniami kilka zadań, na przykład dotyczących obliczeń zegarowych lub kalendarzowych, w których głównym problemem jest kontrolowanie końców rozważanego przedziału, na przykład czasowego. Najlepiej byłoby, gdyby uczniowie samodzielnie zauważyli, że odjęcie od siebie liczb odpowiadających końcom przedziału, czasami prowadzi do błędnej odpowiedzi i zastanowili się, jak radzić sobie z takimi zadaniami. Jest to tym ważniejsze, że wydaje się, że z takimi problememi nie do końca radzą sobie także dorośli.

Zadanie 4. „Oś liczbowa"

Na rysunku przedstawiono oś liczbową, na której zaznaczono pięć punktów.



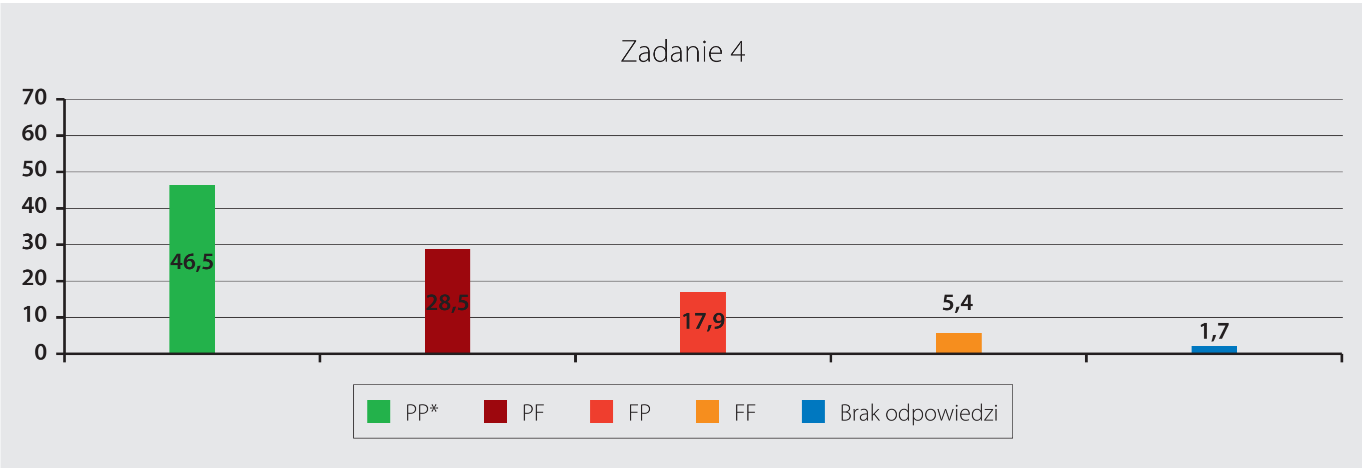
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Punkt *B* odpowiada liczbie –2.	P*	F
Spośród zaznaczonych punktów tylko trzy odpowiadają liczbom ujemnym.	P*	F

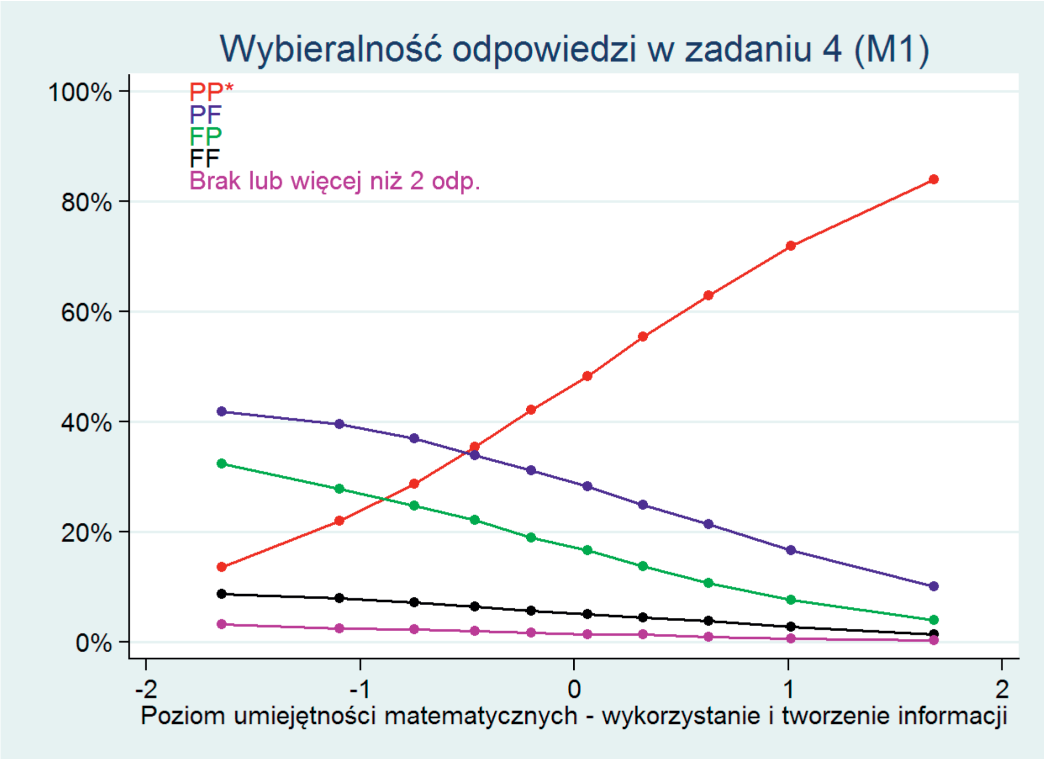
Wymagania ogólne:
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe:
3. Liczby całkowite. Uczeń:
   2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej.

Do poprawnego rozwiązania tego zadania potrzebna jest orientacja w położeniu liczb całkowitych na osi liczbowej oraz umiejętności ustalenia odcinka jednostkowego. Istotne jest, by uczeń konsekwentnie korzystał z tego ustalonego odcinka. Pomocne jest podpisanie wszystkich zaznaczonych na osi punktów między –6 i 3 odpowiednimi liczbami.



Aby otrzymać punkt za to zadanie należało prawidłowo ocenić prawdziwość obu podanych w nim zdań. Potrafiło to wykonać 47% uczniów.
Pierwszą część zadania poprawnie rozwiązało 75% uczniów, a drugą – 64% uczniów.
Błędnych odpowiedzi udzieliło odpowiednio: w pierwszej części zadania – 23%, w drugiej części – 34% uczniów.
Obu niepoprawnych odpowiedzi udzieliło tylko 5% uczniów.
Zadania nie rozwiązało lub zaznaczyło więcej niż dwie odpowiedzi prawie 2% uczniów.



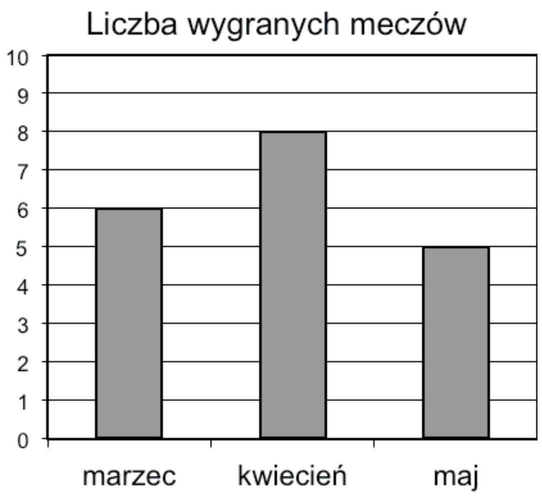
Warto zwrócić uwagę, że nawet najsłabsi uczniowie potrafili poprawnie ocenić prawdziwość jednego lub obu podanych zdań – tylko około 10% spośród nich udzieliło odpowiedzi FF. Warto również zauważyć, że również ponad 10% uczniów o najwyższych umiejętnościach w zakresie wykorzystania i tworzenia informacji nie ocenili poprawnie drugiego z podanych zdań – udzielali oni odpowiedzi PF. Prawdopodobnie ich błędna odpowiedź wynikała z policzenia nie tylko zaznaczonych literami punktów odpowiadających liczbom ujemnym, ale także innych liczb na osi, na przykład liczby -6.

Rekomendacje

Przy okazji omawiania z uczniami tego zadania, warto zwrócić uwagę na znaczenie własnych notatek (w tym przypadku prawidłowe podpisanie liczbami punktów na osi liczbowej) – ich niestaranne wykonanie może skutkować błędami w rozwiązaniu.

Należy także wykorzystywać sposobne okazje, by przypominać uczniom podstawowe własności liczb (np. ujemne, dodatnie, liczba 0).

Zadanie 7. „Turniej”



5.2. II wymaganie ogólne: Wykorzystanie i tworzenie informacji

Drużyna Orlików brała udział w wiosennym turnieju w siatkówce. W każdym miesiącu drużyna rozgrywała 10 meczów. Na diagramie przedstawiono liczby meczów wygranych w poszczególnych miesiącach. Pozostałe mecze drużyna Orlików przegrała.
Zgodnie z zasadami turnieju, za każdy wygrany mecz drużyna otrzymuje 3 punkty, a za każdy przegrany 1 punkt.

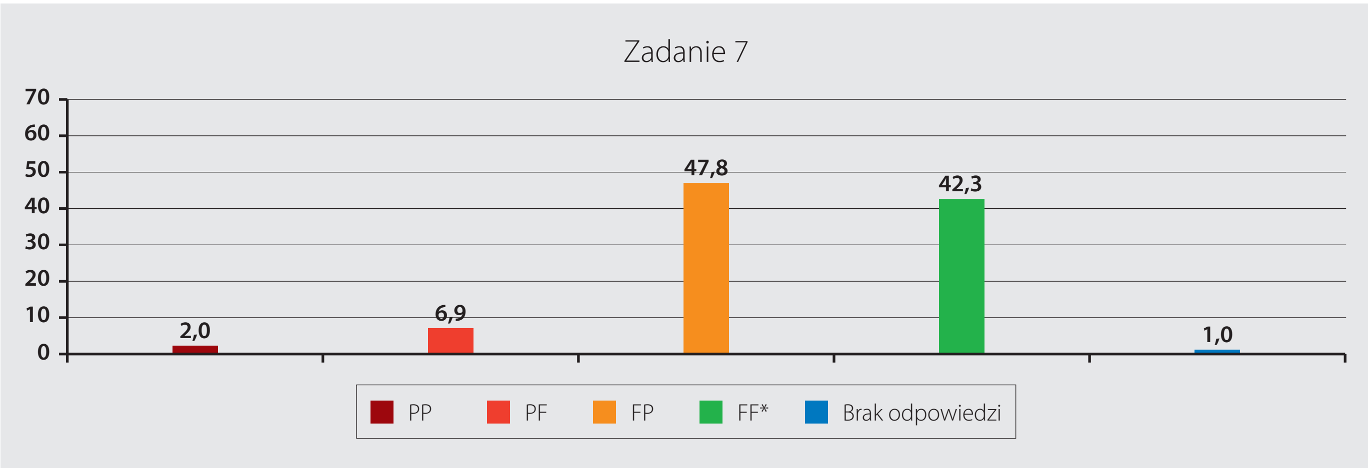
Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

W ciągu tych trzech miesięcy drużyna Orlików wygrała 20 meczów.	P	F*
Liczba punktów zdobytych przez w kwietniu przez drużynę Orlików jest równa 24.	P	F*

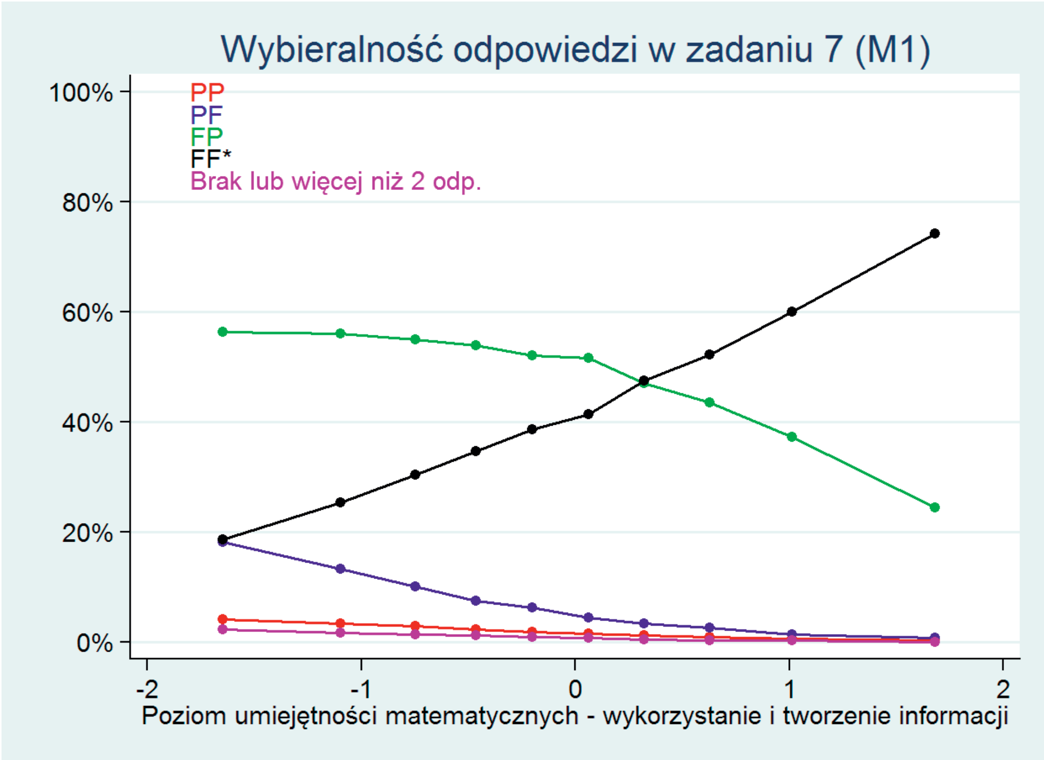
Wymagania ogólne:
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe:
13. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:
    2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
    1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe.

Poprawne rozwiązanie tego zadania wymaga rozumienia informacji podanych w formie diagramu, a także starannego i uważnego przeczytania treści zadania oraz zrozumienia zasady przyznawania punktów za rozegrane mecze. Jeśli uczeń umie odczytać informacje z diagramu i zauważył, że w każdym miesiącu drużyna rozegrała 10 meczów oraz że za przegrane mecze drużyna także otrzymuje punkty, to nie powinien mieć problemów z poprawnym rozwiązaniem tego zadania.



Zadanie zostało poprawnie rozwiązane przez 42% uczniów. Ocenili oni właściwie prawdziwość obu podanych zdań.
Pierwszą część zadania rozwiązało poprawnie 90% uczniów, a drugą – 49% uczniów.
Błędne odpowiedzi wybierało odpowiednio: w pierwszej części zadania – 9%, w drugiej części zadania – 50% uczniów.
Zadania nie rozwiązało lub zaznaczyło więcej niż dwie odpowiedzi 1% uczniów.



Aby poprawnie ocenić prawdziwość pierwszego zdania, wystarczyło poprawnie odczytać informacje przedstawione na diagramie i wykonać proste dodawanie – potrafiło to zrobić aż 90% uczniów klasy piątej.

Gorzej było z drugim zdaniem – aby je właściwie ocenić, nie wystarczyło poprawnie odczytać dane z diagramu, ale także uważnie przeczytać i zrozumieć zasadę przyznawania punktów za rozegrane mecze oraz pamiętać, że w każdym miesiącu drużyna rozgrywała 10 meczów. Okazuje się, że wyłowienie z tekstu zadania i z diagramu, a następnie synteza i właściwe wykorzystanie aż tylu informacji przekracza możliwości połowy uczniów.

Wyniki te jasno wskazują, że uczniowie klasy V bardzo dobrze opanowali odczytywanie informacji z diagramów, jednak około połowa z nich ma kłopoty z bardziej złożonymi problemami, w których należy wykorzystać informacje o różnym charakterze uzyskane z kilku źródeł.

Rekomendacje

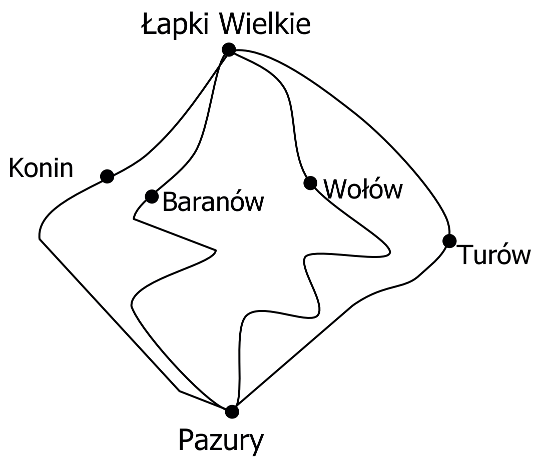
Przyczyną niepowodzeń uczniów w tym zadaniu mogą być kłopoty z czytaniem ze zrozumieniem tekstów zawierających wiele różnych informacji specyficznych dla matematyki. W tej sytuacji wskazana jest wspólna z uczniami analiza tekstów opisujących różne reguły postępowania lub zawierających dane liczbowe przedstawione na wiele sposobów. Warto stawiać uczniów także przed nietypowymi problemami (jak zasada punktacji podana w zadaniu) i zwrócić im uwagę, by nie ulegając przyzwyczajeniom wnikliwie analizowali opis nowej sytuacji. Należy jak najczęściej dawać uczniom okazję do stworzenia własnych sposobów na uporządkowanie i przyswojenie podanych reguł i informacji oraz skutecznego ich używania, szczególnie wtedy, gdy znalezienie rozwiązania wymaga rozważenia ich łącznie, w różnych konfiguracjach. Korzystne dla rozwijania samodzielności poznawczej uczniów może być także formułowanie własnych tekstów opisujących językiem matematyki, np. pewne zjawiska, zależności, reguły postępowania oraz samodzielne tworzenie zestawień danych liczbowych w postaci tabel czy diagramów.

Zadanie 8. „Drogi”

W tabeli poniżej podano długości dróg z Łapek Wielkich i z Pazur do Konina, Baranowa, Wołowa i Turowa.

droga	Konin	Baranów	Wołów	Turów
Łapki Wielkie	24 km	25 km	19 km	36 km
Pazury	42 km	38 km	52 km	29 km

Ania chce przejechać najkrótszą drogą z Łapek Wielkich do Pazur. Ma do wyboru cztery trasy: przez Konin, przez Baranów, przez Wołów i przez Turów.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

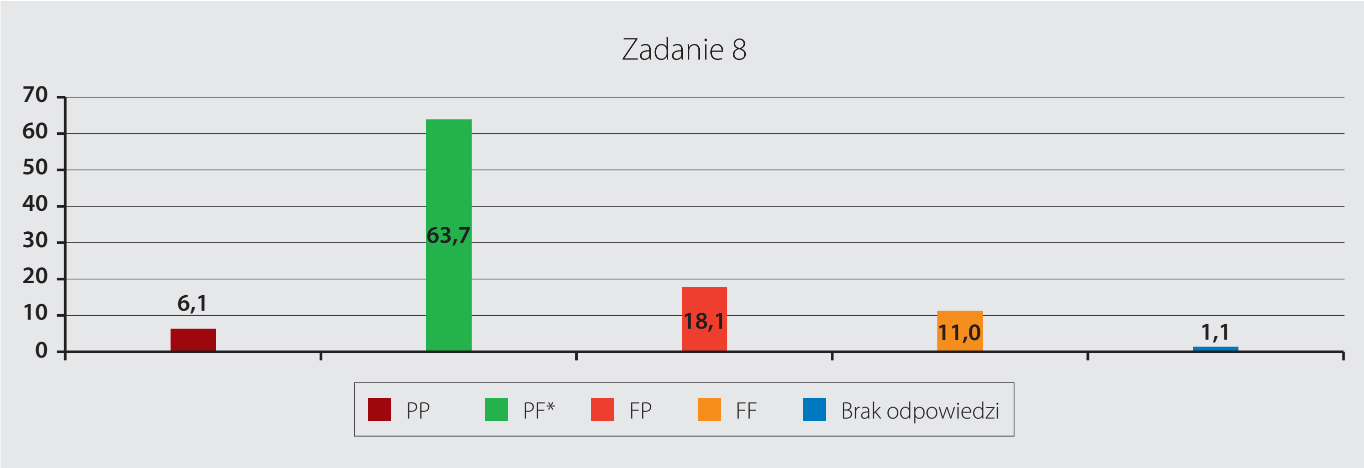
Droga z Łapek Wielkich do Pazur przez Turów ma długość 65 km.	P*	F
Najkrótsza droga z Łapek Wielkich do Pazur prowadzi przez Wołów.	P	F*

Wymagania ogólne:
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

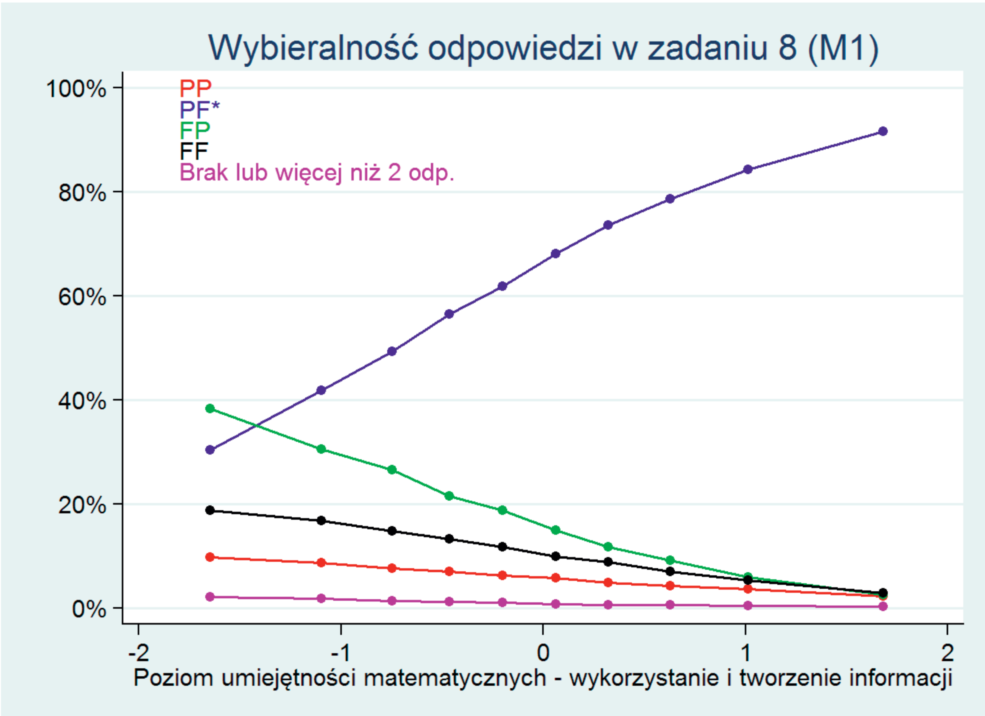
Wymagania szczegółowe:
1. Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:
   3) porównuje liczby naturalne;
2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
   1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe, liczby wielocyfrowe w przypadkach takich jak np. 230 + 80 lub 4600 – 1200; liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej.

13. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:
    2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.

Zadanie ma dość złożoną formę – składa się na nie tekst, tabela i schemat tras. Aby je rozwiązać trzeba poradzić sobie z przeczytaniem i zrozumieniem tej złożonej treści oraz poprawnie wykorzystać informacje podane w tabeli.
Aby lepiej zrozumieć związki między podanymi w tabeli liczbami, obok zadania umieszczony został schemat tras. Jeśli uczeń po przeczytaniu zadania od razu widzi, które liczby i w jaki sposób wykorzystać do rozwiązania, może w ogóle nie korzystać z podanego schematu. Natomiast jeśli ma kłopot z „ułożeniem sobie w głowie” podanych treści i wielkości, to może nanieść podane w tabeli liczby na schemat, co ułatwi mu rozwiązanie zadania.



Zadanie zostało poprawnie rozwiązane przez 2/3 uczniów.
Pierwszą część zadania rozwiązało poprawnie 70% uczniów, a drugą – 75% uczniów.
Błędne odpowiedzi wybierało odpowiednio: w pierwszej części zadania – 28%, w drugiej części zadania – 24% uczniów.
Zadania nie rozwiązało lub zaznaczyło więcej niż dwie odpowiedzi 1% uczniów.



W tym zadaniu najczęściej wybieraną błędną kombinacją odpowiedzi była FP – wskazało ją łącznie 16% uczniów, a wśród uczniów najsłabszych prawie 40%. Oznacza to, że uczniowie ci niepoprawnie ocenili oba podane zdania. Mogło to wynikać z błędnego odczytania danych z tabeli, niepoprawnych obliczeń lub z tego, że słabsi uczniowie nie potrafili sobie poradzić z tyloma informacjami podanymi w różnych formach.
Warto zauważyć, że osoby, które poprawnie wykonały obliczenia, oceniając pierwsze zdanie, czyli długość drogi z Łapek do Pazur przez Turów, mogły wykorzystać ten wynik do rozstrzygnięcia, czy drugie zdanie jest prawdziwe. Wystarczyło bowiem zauważyć, że droga przez Wołów, o której jest mowa w drugim zdaniu, jest dłuższa niż droga przez Turów. Zatem droga przez Wołów nie jest drogą najkrótszą. Oczywiście nie wynika stąd, która droga jest najkrótsza, ale o to nie pytamy w zadaniu.

Byłoby dobrze, gdyby choć część uczniów skorzystało z takiej możliwości rozwiązania. Inny sposób rozwiązania polega po prostu na obliczeniu długości wszystkich dróg.

Rekomendacje

Dobrym ćwiczeniem dla uczniów jest rozwiązywanie zadań zawierających informacje podane w różnej postaci – tabel, diagramów, schematów. Istotne jest także, aby przynajmniej niektóre z tych zadań zawierały więcej informacji i danych, niż potrzebne jest do rozwiązania.

Przy rozwiązywaniu takich zadań uczniowie powinni mieć możliwość używania własnych sposobów porządkowania informacji podanych w treści zadania, odsiewania informacji zbędnych i wybierania istotnych. Należy zachęcać uczniów, by zapisywali je w dowolny, wybrany przez nich sposób tak, aby stanowiły one dla ucznia wygodną, zrozumiałą podstawę do rozwiązania zadania.

Bardzo ważne jest również prezentowanie na forum klasy nie tylko różnych sposobów notowania ważnych informacji, ale i różnych sposobów rozwiązania tego samego zadania.

To zadanie jest dobrym materiałem, by pokazać uczniom, jak cenna jest spokojna analiza cząstkowych rezultatów i rozważenie sposobów ich wykorzystania. Zapewne wielu uczniów bez namysłu wpadła w koleiny rutynowych rachunków i obliczyła długość wszystkich dróg, ale ci, którzy w takiej sytuacji poświęcą kilka chwil na zastanowienie się i zrozumienie sensu zadania, uzyskają wynik szybciej i mniejszym nakładem sił. W tym zadaniu, w którym rachunki sprowadzają się do dodania dwóch liczb całkowitych, przyjęta w rozwiązaniu strategia, nie ma aż tak dużego znaczenia. Ale na pewno każdy uczeń spotka się w przyszłości z zadaniem w którym uważne, świadome ocenianie znaczenia uzyskanych efektów cząstkowych, oszczędzi mu mnóstwo niekoniecznej pracy.

Zadanie 14. „Tenis”

	15.00 – 16.00	16.00 – 17.00	17.00 – 18.00
12 maja poniedziałek	Ewa		
13 maja wtorek	Szymon	Kasia	Wojtek
14 maja środa	Ewa	Andrzej	
15 maja czwartek	Borys		
16 maja piątek	Szymon	Kasia	Wojtek
17 maja sobota	Ewa	Andrzej	
18 maja niedziela			

Trener tenisa zapisał w kalendarzu imiona wszystkich dzieci, które uczestniczyły w indywidualnych treningach w kolejnych dniach w tygodniu przed zawodami. Za każdą lekcję trener pobiera taką samą kwotę. W tym tygodniu za wszystkie lekcje udzielone dzieciom otrzymał 600 zł.

Ile zapłacili rodzice Ewy za wszystkie jej lekcje tenisa w tym tygodniu?

Wymagania ogólne:

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe:

13. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:
    2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
    3) dostrzega zależności między podanymi informacjami.
    5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.

Aby poprawnie rozwiązać zadanie, uczeń musi połączyć informacje podane w tekście zadania z informacjami podanymi w tabeli. Zadanie sprawdza podobne umiejętności jak zadanie 8 (poprzednie omawiane), ale jest zadaniem otwartym, a wiec dodatkowo uczeń musi zapisać rozwiązanie.

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób:
600 zł : 12 = 50 zł – cena 1 lekcji
Ewa brała 3 lekcje, czyli jej rodzice zapłacili 3 · 50 zł = 150 zł.

II sposób:
Trener dał w tym tygodniu 12 lekcji – 3 z nich to były lekcje z Ewą.

Czyli lekcje Ewy to $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ wszystkich lekcji w tym tygodniu.

Rodzice Ewy zapłacili $\frac{1}{4} \cdot 600$ zł = 150 zł.

Schemat oceniania

2 punkty
Poprawna odpowiedź, że rodzice Ewy zapłacili 150 zł.
kod 2.1 – Poprawna odpowiedź i poprawne obliczenia.
kod 2.2 – Tylko poprawna odpowiedź, bez obliczeń.

1 punkt
kod 1.1 – Poprawny sposób obliczenia kwoty, jaką zapłacili rodzice Ewy, z błędami rachunkowymi. Na przykład:
- 600 : 12 = 5,   5 · 3 = 15 zł.
- Ewa miała 3 lekcje, czyli $\frac{3}{12} = \frac{1}{3}$. Jej rodzice zapłacili $\frac{1}{3} \cdot 600 = 200$ zł.

kod 1.2 – Poprawne obliczenie ceny 1 lekcji (50 zł). Dalszych obliczeń brak lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. Na przykład:
- 600 : 12 = 50 zł.
- 600 : 12 = 50 zł, 50 · 2 = 100 zł.

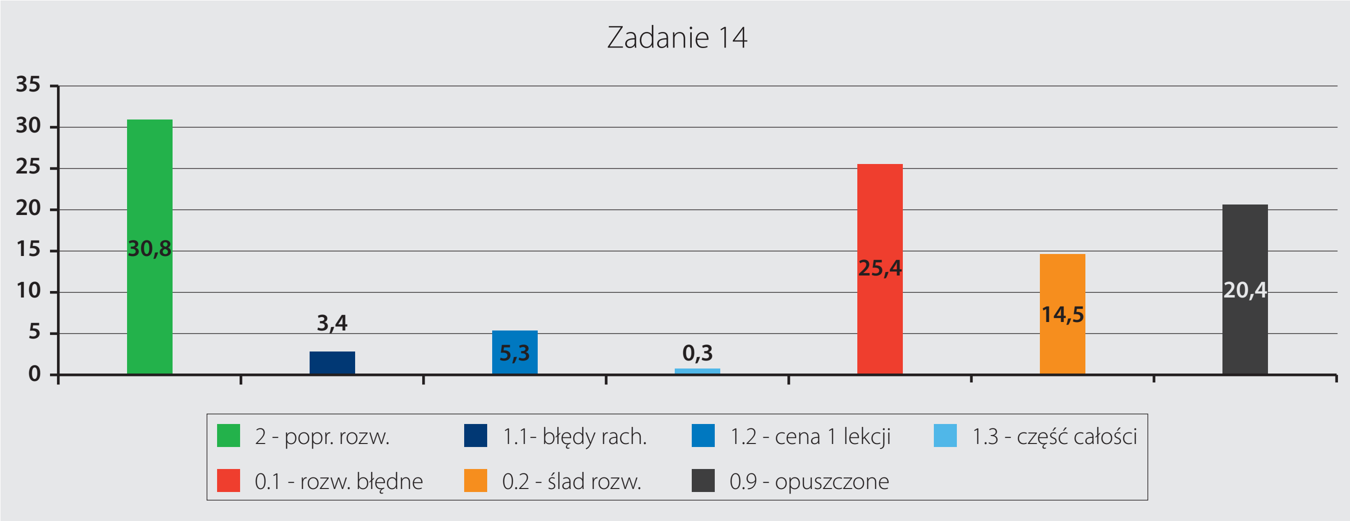
kod 1.3 – Poprawne obliczenie lub zapisanie, jaką częścią wszystkich lekcji były lekcje Ewy. Dalszych obliczeń brak lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. Na przykład:

- Ewa miała 3 lekcje, czyli $\frac{3}{12}$.

0 punktów
kod 0.1 – Rozwiązanie błędne. Na przykład:
- 600 : 6 = 100.
- 600 : 6 = 100, 100 · 3 = 300.

kod 0.2 – Brak rozwiązania i odpowiedzi, ale pozostał ślad zajmowania się zadaniem: przekreślone obliczenia, komentarz (np. „nie wiem", „za trudne"), rysunek niezwiązany z zadaniem (np. słoneczko, buźka).
kod 9 – Brak rozwiązania (zadanie opuszczone).

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



Łatwość zadania była równa 0,35. Oznacza to, że uczniowie zdobyli za nie 35% możliwych punktów. Mniej niż 1/3 uczniów (31%) uzyskało za to zadanie 2 punkty, czyli rozwiązało je poprawnie do końca. Kolejne 9% otrzymało 1 punkt. Spośród nich co trzeci rozwiązał zadanie do końca poprawną metodą, ale popełnił błędy rachunkowe. Błędy te wiązały się najczęściej z trudnościami w podzieleniu liczby 600 przez dwucyfrową liczbę 12. Kolejne 5% wszystkich badanych uczniów poprawnie obliczyło cenę jednej lekcji i na tym zakończyło rozwiązanie lub mnożyło tę cenę przez liczbę lekcji inną niż 3, na przykład przez 6 lub 7. Zaledwie 0,3% uczestników badania rozwiązywało to zadanie II przedstawionym powyżej sposobem i nie doprowadziło rozwiązania do końca – uczniowie ci obliczyli, jaką częścią wszystkich lekcji były lekcje Ewy i na tym poprzestali lub dalszy ciąg ich rozwiązania był niepoprawny.

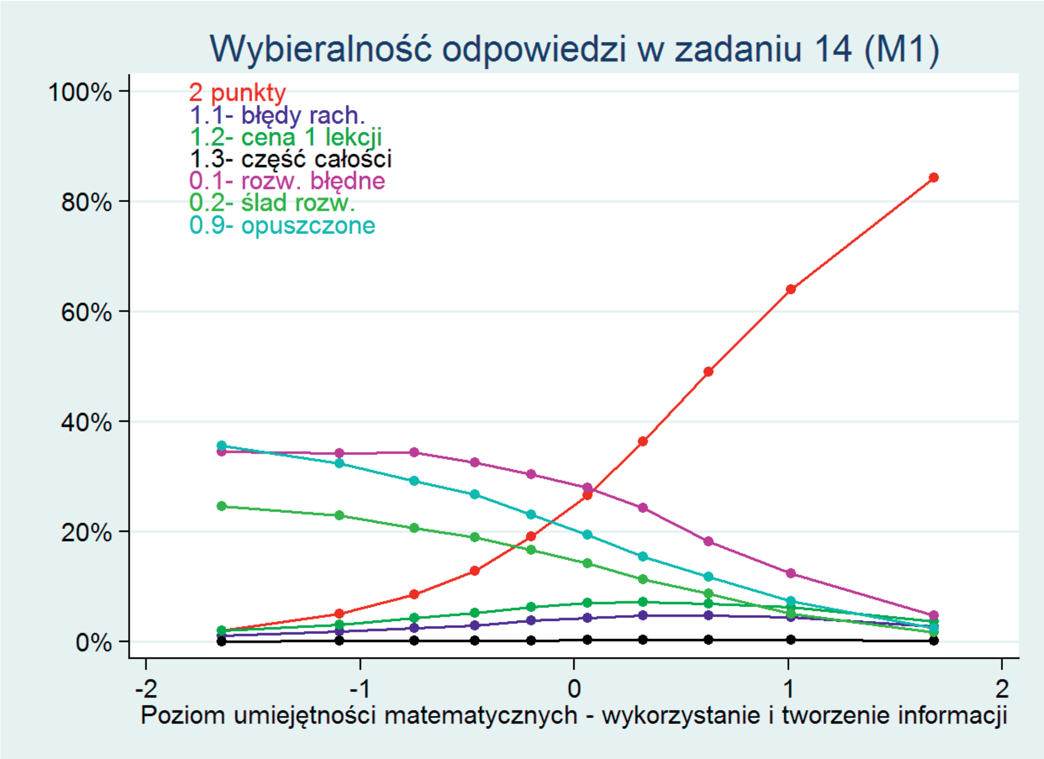
Zero punktów za to zadanie otrzymało 60% uczniów. Wśród nich co trzeci w ogóle nie podjął próby rozwiązania zadania. Co czwarta osoba z tej grupy zajęła się, co prawda, zadaniem, ale porzuciła je, nie dochodząc do żadnych, nawet częściowych wyników. Uczniowie ci na przykład zakreślili w tabeli lekcje Ewy lub tylko wypisali liczby występujące w zadaniu albo zaczynali coś obliczać, ale później wszystkie działania przekreślili.

Warto zauważyć, że tylko niewielka część uczniów (9%) przedstawiła rozwiązania uznane za częściowo prawidłowe i uzyskała 1 punkt. W zdecydowanej większości przypadków albo rozwiązania były pełne (31%), albo błędne lub ich nie było (60%).

W zadaniach otwartych, po wprowadzeniu do programu komputerowego wyniku ucznia, nauczyciel odpowiadał na jedno lub kilka dodatkowych pytań na temat rozwiązania przedstawionego przez ucznia. W tym zadaniu pytanie było tylko jedno i dotyczyło sposobu rozwiązania. Okazuje się, że:

- 56% wszystkich uczniów rozwiązywało zadanie I przedstawionym wyżej sposobem, czyli obliczało cenę jednej lekcji
- zaledwie 3% rozwiązywało zadanie II sposobem, czyli obliczało jaką częścią wszystkich lekcji są lekcje Ewy
- pozostali uczniowie nie przedstawili sposobu rozwiązania.

Do poprawnego rozwiązania tego zadania niepotrzebne były zaawansowane techniki rachunkowe i to nie w złożoności rachunkowej należy szukać przyczyny uczniowskich kłopotów. Być może tym, co zaskoczyło uczniów, była forma tabeli zawierającej informacje niezbędne do rozwiązania, choć jest to przecież typowa karta z terminarza. Nie jest to jednak typowa tabela z wartościami liczbowymi i już to wystarczyło, by zniechęcić dużą grupę uczniów do podjęcia się rozwiązania zadania. Wielu z tych, którzy podjęli wyzwanie, nie potrafiło jednak poprawnie zinterpretować danych w tabeli.



Dodatkowe informacje, jakie można odczytać z tego wykresu:

- wśród uczniów z najwyższego decyla, czyli wśród 10% najlepszych, zadanie rozwiązało około 85% uczniów, czyli było ono dla nich dość łatwe
- dla średnich uczniów zadanie było trudne – potrafiło je rozwiązać zaledwie około 30% z nich
- dla słabych uczniów zadanie było właściwie nierozwiązywalne.

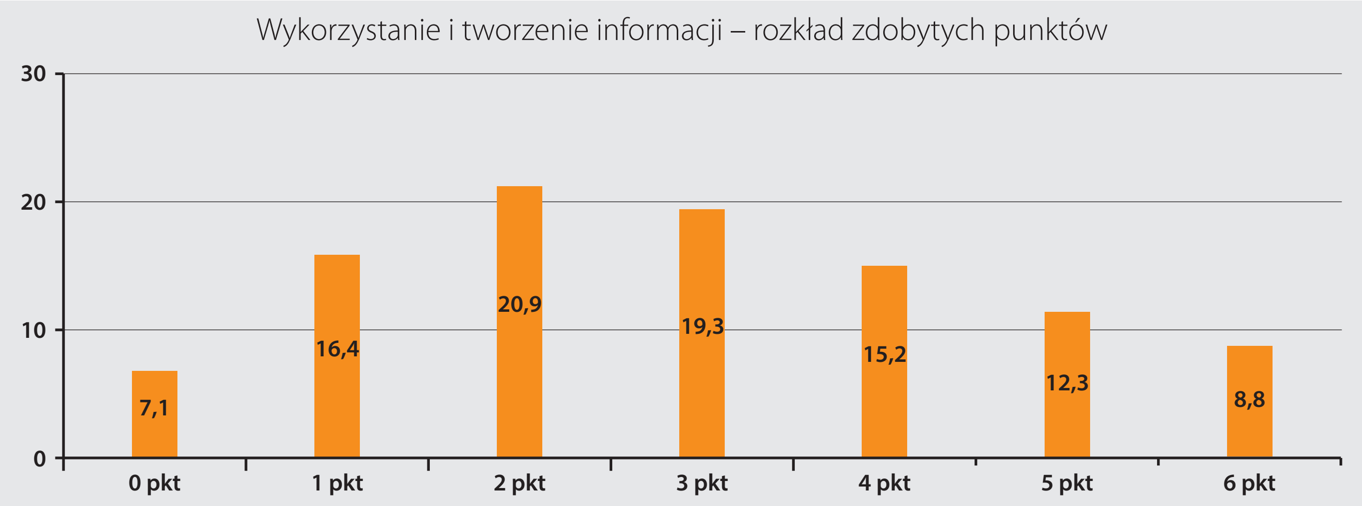
Rekomendacje

Kłopoty uczniów ze zrozumieniem danych zawartych w tabeli umieszczonej w tym zadaniu, wskazują na potrzebę częstszego wykorzystania na lekcjach różnorodnych sposobów przedstawiania danych oraz częstszego rozwiązywania zadań opartych na rzeczywistych sytuacjach życiowych. Należy dążyć do wykształcenia u uczniów odwagi w podejmowaniu się rozwiązania niestandardowych zadań i przekonania, że zasady logicznego, matematycznego postępowania można zastosować także w sytuacjach, z którymi wcześniej się nie spotkali. Rozwiązania takich zadań mają często złożoną strukturę, warto więc częściej na lekcjach sięgać do problemów, które wymagają wykonania kilku kroków lub głębszej analizy danych. W zadaniach wieloetapowych należy zachęcać uczniów, by po uzyskaniu częściowych wyników, konfrontowali je z poleceniem. Niektórzy uczniowie, nienawykli do dłuższych rozwiązań, uznają, że gdy otrzymali już jakiś rezultat, to musi być on odpowiedzią na zadane pytanie. Im więcej zadań wymagających kilku kroków uczeń rozwiąże, tym mniej popełni błędów tego typu.

Często uczniowie nie zapisują komentarzy do swoich obliczeń – utrudnia to zrozumienie ich rozwiązania i poprawną jego ocenę, zwłaszcza w zadaniach otwartych. Warto zachęcać uczniów do opisu ich rozwiązań. Uczniom, którzy mieli trudności w tym zadaniu, przydadzą się podobne ćwiczenia, jak te opisane w rekomendacjach do zadania 8.

Wykorzystanie i tworzenie informacji. Podsumowanie

W zadaniach sprawdzających umiejętność wykorzystania i tworzenia informacji uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 6 punktów. Wykres poniżej pokazuje rozkład uzyskanych punktów.



Patrząc na wykres można zauważyć, że około 19% uczniów uzyskało 3 punkty, czyli połowę punktów możliwych do zdobycia, około 45% uczniów otrzymało mniej niż połowę punktów, a około 36% więcej niż połowę punktów.

Takie wyniki świadczą o tym, że w zakresie umiejętności wykorzystania i tworzenia informacji nie jest najgorzej.

Mediana (wynik środkowy) jest równa 3 i leży blisko średniej arytmetycznej wszystkich wyników równej 2,9. Najczęściej występującym wynikiem okazały się 2 pkt, ale niewiele mniej osób uzyskało 3 punkty.

Z analizy wyników uzyskiwanych w poszczególnych zadaniach wynika, że umiejętnością dobrze opanowaną przez większość uczniów jest odczytywanie pojedynczych informacji podanych na diagramie lub w tabeli. Jednak już odczytanie wielu informacji podanych w kilku źródłach (w tekście zadania, na diagramie, w tabeli, na schemacie), a następnie właściwe ich połączenie i wykorzystanie, przekracza możliwości znacznej części uczniów klasy V.

Można również powiedzić, że uczniowie nieźle radzą sobie z posługiwaniem się informacjami w sytuacjach prostych, typowych. Nieco gorzej jest, gdy należy odczytać informacje podane w nietypowej formie (np. tabela w zadaniu o tenisie).

Rekomendacje

Ogólne wskazanie pomagające skuteczniej rozwijać umiejętność odczytywania i wykorzystywania informacji, można ująć jednym słowem: różnorodność. Dotyczyć ona powinna:

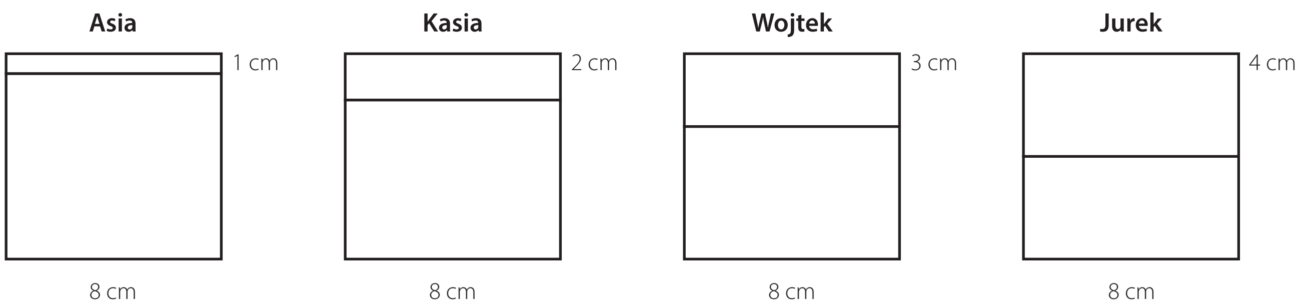
- złożoności zadań – od zadań prostych, z niewielką liczbą danych, do problemów rozbudowanych, wymagających łączenia wielu informacji lub wykonania kilku kroków, również wykorzystując zadania z nadmiarem danych lub wymagajacych interpretacji danych
- treści – zadania nawiązujące do różnych sytuacji realnych, zawierające typowe, często spotykane informacje, ale również opisujące nietypowe konteksty lub reguły postępowania, wymagajace od ucznia starannego ich przeczytania i analizy
- formy – dane prezentowane w różny sposób i w różnych zestawieniach, od typowych diagramów i tabel, przez zestawienia mniej typowe – schematy, rozkłady jazdy, osie czasu i wiele innych.

5.3. III wymaganie ogólne: Modelowanie matematyczne

PP: „Uczeń dobiera odpowiedni model matematyczny do prostej sytuacji, stosuje poznane wzory i zależności, przetwarza tekst zadania na działania arytmetyczne i proste równania".
Modelowanie matematyczne, to docelowo tworzenie reprezentacji zachowujących w określonej konwencji istotne cechy oryginału. Modele mogą być tworzone jako formy unikatowe, na potrzeby konkretnego zadania (np. równanie do konkretnego zadania tekstowego) albo bardziej uniwersalne (np. wzór na pole trójkąta).
Od uczniów szkoły podstawowej trudno wymagać wielkiej wprawy w tworzeniu modeli określonych obiektów, związków czy procesów. Ze względu na złożoność i abstrakcyjność tego procesu umiejętność ta jest więc w szkole podstawowej kształcona na poziomie bardzo propedeutycznym. Czas na jej pełniejsze rozwinięcie przyjdzie na dwóch kolejnych etapach edukacyjnych. Tymczasem najodpowiedniejsze jest ograniczenie się do tych czynności związanych z modelowaniem, które są w zasięgu ucznia, czyli dobieranie gotowych modeli do prostych sytuacji, czy prosta matematyzacja sytuacji opisanej w zadaniu za pomocą działań arytmetycznych lub nieskomplikowanych równań.
Umiejętności zawarte w tym obszarze, sprawdzane były przez cztery zadania z zestawu – zadania 9, 10, 12 i 13.

Zadanie 9. „Kartki"

Asia, Kasia, Wojtek i Jurek rozcięli takie same kwadratowe kartki na dwie prostokątne części. Każde dziecko rozcięło swoją kartkę w inny sposób, tak jak przedstawiono na rysunkach.



Każda z czterech osób obliczyła obwody obu otrzymanych części i dodała liczby do siebie. Wskaż poprawną informację o uzyskanych wynikach.

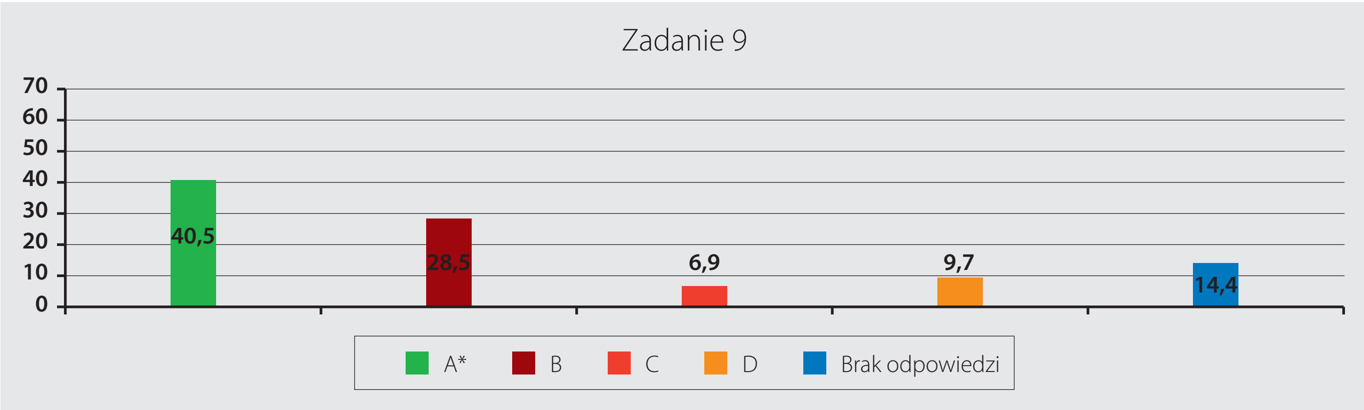
A. * Każda z tych czterech osób otrzymała ten sam wynik.
B. Największy wynik otrzymał Jurek.
C. Wynik Kasi był mniejszy niż wynik Wojtka.
D. Najmniejszy wynik otrzymała Asia.

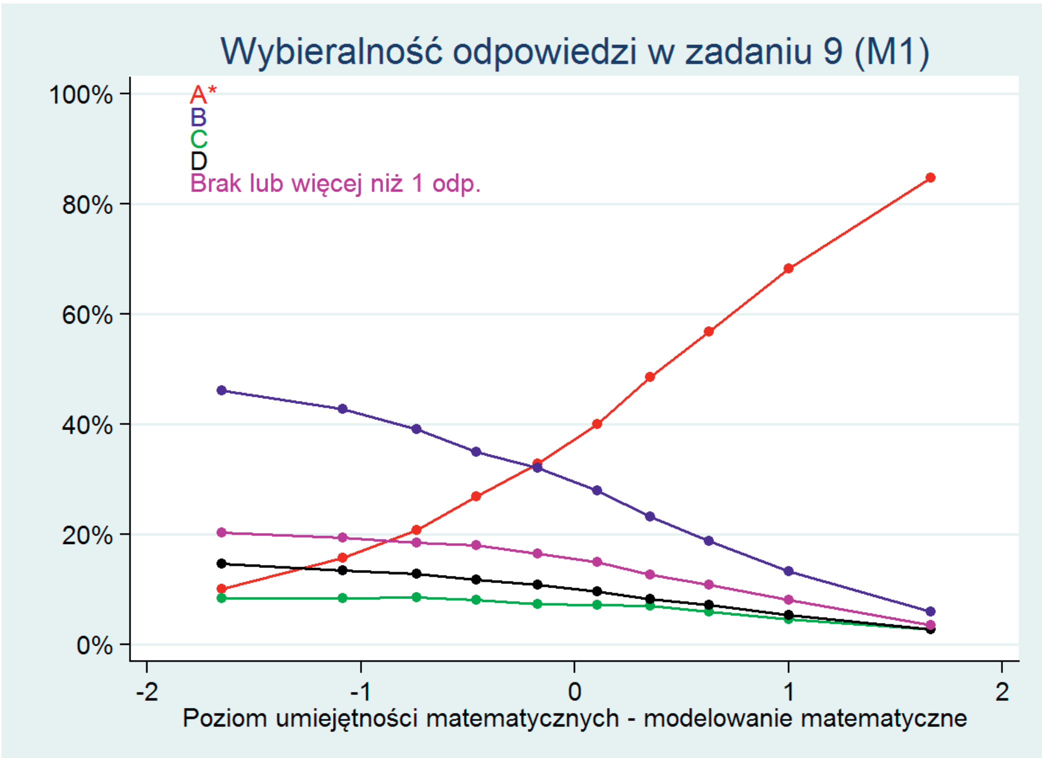
Wymagania ogólne:
III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe:
1. Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:
   3) porównuje liczby naturalne
11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
   1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków.

To zadanie można rozwiązać, pracowicie obliczając obwody otrzymanych prostokątów, sumując je parami i porównując otrzymane wyniki. Można jednak zauważyć, że suma obwodów w każdym przypadku składa się z czterech boków poziomych oraz z kawałków boków pionowych, które

powstały z rozcięcia identycznych odcinków. Wobec tego sumy pionowych odcinków, a co za tym idzie również całych obwodów są dla każdego kwadratu identyczne.
Pierwszy z podanych sposobów rozwiązania jest prosty i skuteczny, ale stosując go, łatwo popełnić błąd rachunkowy. Pozwala on jednak słabszym uczniom znaleźć odpowiedź do zadania. Przy tym sposobie rozwiązania warto wykorzystać uzyskane wyniki liczbowe jako podstawę do spostrzeżeń, a w konsekwencji do budowania modelu dla tego zadania i uogólnienia uzyskanego wyniku.
Drugi sposób natomiast nie jest widoczny natychmiast, ale jest znacznie szybszy i całkowicie odporny na błędy rachunkowe, ponieważ w ogóle nie wykorzystuje się w nim danych liczbowych. Tym sposobem mogą pracować uczniowie, którzy mają doświadczenie w rozwiązywaniu tego typu problemów, w budowaniu modelu dla tego typu zadań lub uczniowie, którzy mają naturalną umiejętność spostrzegania ogólniejszej postaci postawionego problemu.





Znaczący jest fakt, że aż 14% uczniów nie podało odpowiedzi do tego zadania. To zdecydowanie największy odsetek opuszczeń wśród zadań zamkniętych, większy nawet niż odsetek opuszczeń w zadaniu 13 – pierwszym zadaniu otwartym. Być może wielu z uczniów, którzy w tym zadaniu nie podali odpowiedzi, zaczęło liczyć obwody otrzymanych prostokątów, ale pogubiło się w rachunkach i porzuciło zadanie, nie podając odpowiedzi.

Warto też zwrócić uwagę na przewagę błędnej odpowiedzi B nad pozostałymi odpowiedziami błędnymi. Oznaczać to może, że znaczna część uczniów ocenia niektóre zależności geometryczne „na oko". Taką interpretację potwierdza również wyższy odsetek wyborów dystraktora D (drugiego ze „skrajnych") niż C. Prawdopodobnie w obu przypadkach decydujące dla wyboru było spostrzeżenie, że górna część ma największy albo najmniejszy obwód.
Patrząc na ten wykres, warto zwrócić uwagę, że wśród najsłabszych uczniów poprawna odpowiedź była jedną z dwóch najrzadziej wybieranych – wskazało ją tylko około 10% tych uczniów. Z kolei wśród uczniów najlepszych poprawną odpowiedź wybrało około 85% uczniów. Nie było to zatem dla nich zadanie trudne, choć nie wiemy, czy ci najlepsi uczniowie sprawniej liczą czy lepiej myślą.

Rekomendacje
Należy zachęcać uczniów do dostrzegania ogólnych własności geometrycznych i stwarzać im ku temu możliwości.
Godnym polecenia sposobem postępowania jest rozwiązywanie zadań geometrycznych z konkretnymi danymi liczbowymi, ale „z rozpatrywaniem przypadków", tak jak w omawianym zadaniu. Po rozwiązaniu takiego zadania, koniecznie należy zatrzymać się i wspólnie z uczniami przyjrzeć otrzymanemu wynikowi: Co nam mówi? Jak można go zinterpretować? Czy nie podpowiada innego, może prostszego sposobu rozwiązania? A może otrzymany wynik przyda się do rozwiązania innego, trudniejszego zadania? Taki „rzut oka wstecz" na właśnie rozwiązane zadanie i otrzymany wynik, może zachęcić uczniów do bardziej ogólnego, syntetycznego spojrzenia na postawiony problem, a w konsekwencji ułatwi dostrzeżenie ogólniejszych, bardziej uniwersalnych rozwiązań.
Warto także rozwiązywać niektóre proste zadania geometryczne o danych w postaci ogólnej, algebraicznej. Dobrym wstępem do takich zadań jest rozwiązanie jednego zadania dla kilku zestawów danych liczbowych, a następnie uogólnienie rozwiązania, korzystając z oznaczeń literowych. Przykładem godnym polecenia na początek jest seria zadań polegajacych na wycinaniu kwadratu z prostokąta, w taki sposób, że bok kwadratu jest częścią boku prostokąta oraz badaniu obwodu powstałej figury. Po rozwiązaniu jednego lub kilku takich zadań z konkretnymi danymi liczbowymi, gdy już uczniowie uchwycą istotne zależności, można przejść do wersji uogólnionej. Zadanie jest rachunkowo nietrudne, a zarazem nieoczywiste, stanowi więc dobry materiał do uczenia i ćwiczenia umiejętności modelowania i uogólniania uzyskiwanych wyników.
Należy także przyzwyczajać uczniów do uzasadniania swoich sądów opartych na wiadomościach, umiejętnościach i logicznym rozumowaniu. Ilekroć zdarzy się ku temu okazja warto pokazywać wyższość takiego postępowania nad odgadywaniem odpowiedzi bez weryfikacji.

Zadanie 10. „Pieski"

Pan Zaleski ma trzy pieski: Azora, Reksa i Sabę. Azor jest cięższy od Reksa o 6 kg, ale jest lżejszy od Saby o 2 kg.
Dokończ podane niżej zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A lub B oraz C lub D.

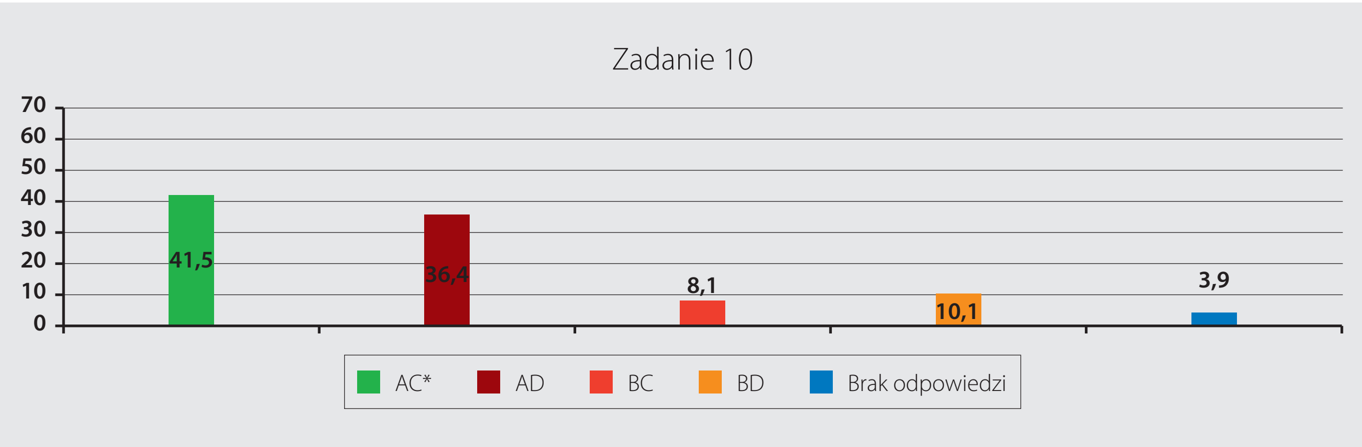
Reks jest od Saby	A.* lżejszy.	B. cięższy.
Różnica wag Saby i Reksa jest równa	C.* 8 kg	D. 4 kg

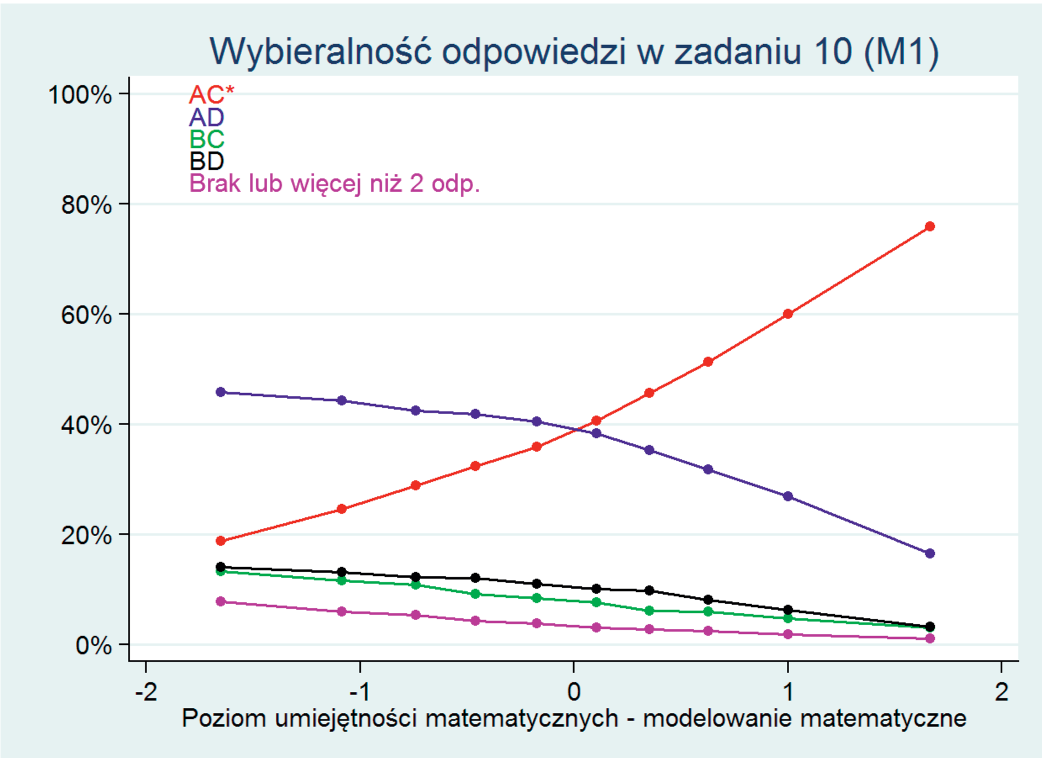
Wymagania ogólne:
III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe:
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe
3) dostrzega zależności między podanymi informacjami

5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.

Do rozwiązania tego zadania potrzebna jest przede wszystkim umiejętność porządkowania podanych informacji i zapisania ich w inny, wygodny dla rozwiązującego sposób.
Zadanie może być trudne dla tych uczniów, którzy nie potrafią narysować lub zapisać zależności między występującymi wielkościami. Tacy uczniowie nie zbudują modelu, nie wychwycą zależności pomiędzy wagami psów, nie przełożą informacji „cięższy od …" na „lżejszy od …".
Warto rozwiązywać tego typu zadania dotyczące zarówno porównywania różnicowego, jak i porównywania ilorazowego, podkreślając znaczenie rysunku lub zapisu danych pozwalającego na swobodną ich interpretację oraz budowę modelu do zadania.





W zadaniu tego typu (dwukrotny wybór pomiędzy dwiema możliwościami) odpowiedź uznawana jest za poprawną tylko, gdy oba wybory dokonane są prawidłowo. To zadanie zostało rozwiązane poprawnie przez 42% uczniów.

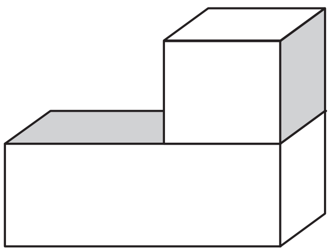
Pierwszą część zadania rozwiązało 78% uczniów, a drugą – 50% uczniów.
Błędne odpowiedzi wybierało odpowiednio: w pierwszej części zadania – 18%, w drugiej części zadania – 46% uczniów.
Zadania nie rozwiązało lub zaznaczyło więcej niż dwie odpowiedzi 4% uczniów.
Zastanawiać może, dlaczego tylko połowa uczniów potrafiła poprawnie odpowiedzieć na drugie pytanie o różnicę między wagami psów, podczas gdy aż 78% uczniów poprawnie odczytało relację lżejszy–cięższy, której dotyczyło pierwsze pytanie.
Wydaje się, niestety, że część uczniów mechanicznie wykorzystywała występujące w zadaniu słowa „lżejszy" i „cięższy". Przy pobieżnym czytaniu i braku umiejętności właściwego powiązania podanych informacji, uczeń może frazę występującą w zadaniu „ale jest lżejszy od Saby" mechanicznie odnieść do obu wymienionych wcześniej psów czyli Reksa i Azora. Tym samym właściwą odpowiedź na pytanie uzyskuje niejako przypadkiem. Natomiast w drugim pytaniu takie bezrefleksyjne wykorzystanie słów „lżejszy" i „cięższy" skłania uczniów do wykonania odejmowania podanych liczb. I tym sposobem, niestety, otrzymują błędną odpowiedź na drugie pytanie.
Powyższy wykres potwierdza, że nawet wśród najsłabszych uczniów zdecydowana większość (około 65%) poprawnie rozwiązywała pierwszą część zadania (odpowiedzi AC lub AD). Z wykresu wynika również, że nawet dla najlepszych uczniów nie było to zadanie łatwe – tylko około 75% spośród nich potrafiło poprawnie odpowiedzieć na obie jego części, a prawie 20% tych najlepszych źle rozwiązała drugą część zadania.

Rekomendacje

Warto rozwiązywać z uczniami różnorodne zadania wymagające szukania związków między podanymi informacjami. Mogą dotyczyć one zarówno porównywania różnicowego, ilorazowego jak i innych związków między danymi. Należy podkreślać przy tym znaczenie rysunku lub takiego zapisu danych, który pozwoli uczniowi na swobodną ich interpretację oraz budowę modelu do zadania. Szczególną uwagę warto zwrócić na zadania, w których uczeń musi przełożyć informację „cięższy od …" na „lżejszy od …" – wprawa w odwracaniu tych relacji będzie miała w przyszłości znaczenie przy rozwiązywaniu nierówności liniowych.

Zadanie 12. „Bryła"

Bryłę sklejono z prostopadłościanu o wymiarach 5 cm x 5 cm x 12 cm i sześcianu o krawędzi 5 cm, tak, jak przedstawiono na rysunku.



Pole powierzchni tej bryły jest równe

A. 350 cm^2 B.* 390 cm^2 C. 415 cm^2 D. 425 cm^2 E. 440 cm^2

Wymagania ogólne:

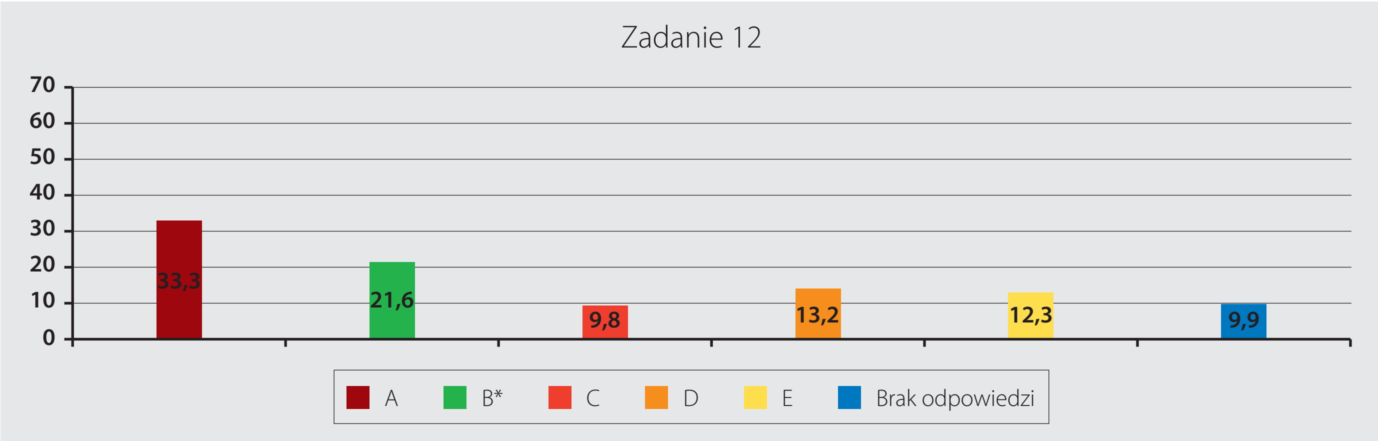
III. Modelowanie matematyczne.

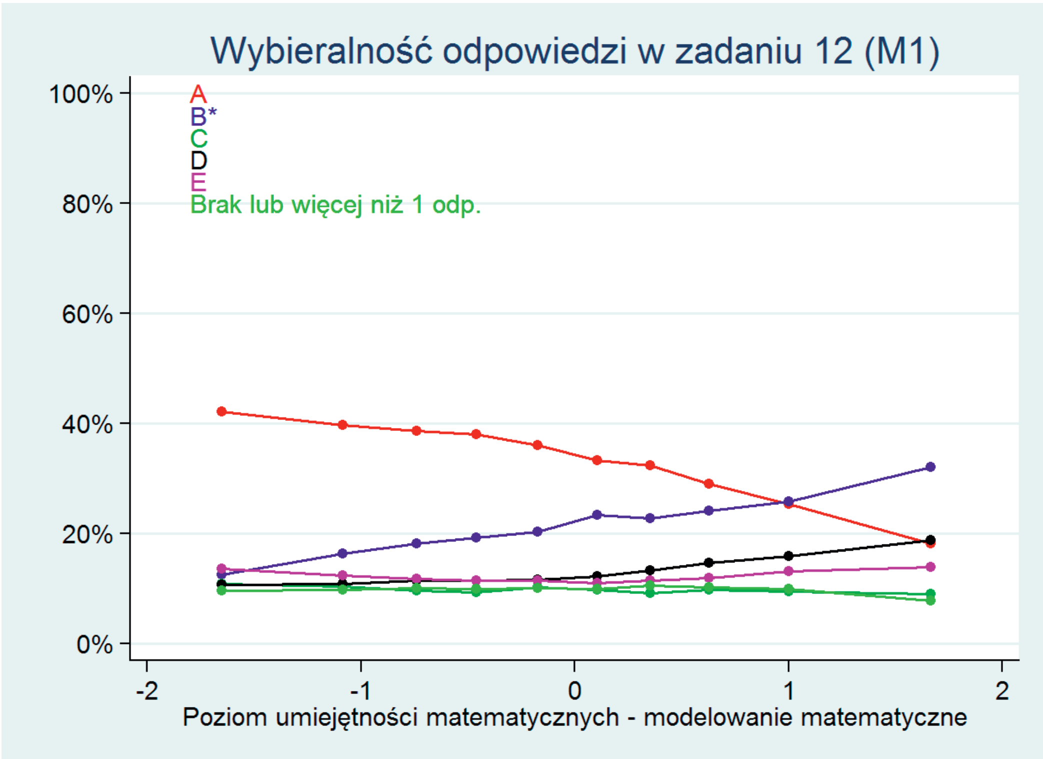
Wymagania szczegółowe:

11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

 4) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi.

Przy rozwiązaniu tego zadania bardzo przydaje się osobiste doświadczenie ucznia. Jeśli bawił się on w oklejanie brył kolorowym papierem lub w sklejanie brył łatwo zauważy, że powierzchnia tej bryły to suma powierzchni prostopadłościanu i sześcianu, ale pomniejszona o pola dwóch kwadratów, które są ze sobą sklejone. Ciąg dalszy rozwiązania wymaga już tylko znajomości wzoru na pole prostokąta i starannych rachunków.





Zadanie okazało się bardzo trudne. Wynik 22% jest niemal taki sam, jaki uzyskaliby uczniowie, wybierając odpowiedź zupełnie losowo. Ciekawe jednak, że ponad losowe 20% wybija się zdecydowanie odsetek wskazań odpowiedzi A. (33%). Taki wynik otrzymali ci, którzy popełnili typowy uczniowski błąd: odczytali z rysunku informacje, których tam nie było. Uznali (błędnie), że prostopadłościan można złożyć z dwóch sześcianów o rozmiarach 5 cm × 5 cm × 5 cm. Gdyby tak było, powierzchnię bryły można by „poskładać" z 14 kwadratów o polu 25 cm^2. Jej pole byłoby więc równe $14 \cdot 25 = 350$. Ta odpowiedź była również wybierana przez uczniów, którzy, nie znając pojęcia „pole powierzchni" lub nie pamiętając, jak się je oblicza, sugerowali się zapisem wymiarów podanym w treści zadania: „5 cm x 5 cm x 12 cm" i wykonywali mnożenie tych trzech wymienionych liczb. Otrzymywali oni wynik 300, a ponieważ nie było takiej odpowiedzi, wybierali najbliższą, czyli 350.

Być może wytłumaczeniem trudności jakie sprawiło uczniom to zadanie jest fakt, że według wielu programów dział „Bryły" omawiany jest w końcowej części roku szkolnego lub w klasie VI. Uczniowie mogli czuć się zagubieni, ponieważ nie poznali i nie opanowali jeszcze potrzebnych pojęć i umiejętności. W tym kontekście prawdopodobne jest, że część uczniów wybierała odpowiedź do tego zadania na „chybił–trafił".
Powyższy wykres potwierdza przypuszczenie, że przyczyną kłopotów w tym zadaniu była nieznajomość zagadnień dotyczących brył. Świadczy o tym bardzo słaba rozwiązywalność tego zadania (około 33%) nawet wśród najlepszych uczniów, którzy w innych zadaniach sprawdzających to samo wymaganie ogólne osiągnęli wysokie wyniki.

Rekomendacje
Przy okazji tego zadania należy uświadomić uczniom błąd, polegający na odgadywaniu własności figur, które nie są podane w treści zadania lub na rysunku. Warto pokazać na tym i innych przykładach, jak takie postępowanie prowadzi do niewłaściwych wniosków.
W nauczaniu geometrii, zarówno płaskiej, jak i przestrzennej, nieocenionym elementem pracy z uczniem jest operowanie realnymi obiektami. Warto dawać uczniom jak najwięcej okazji do zdobywania takich doświadczeń i wyrabiania intuicji geometrycznych.
Godnym polecenia zadaniem, umożliwiającym uczniom manipulowanie figurami na płaszczyźnie, jest budowanie z dwóch prostokątów nowej figury, poprzez ich sklejenie bokami lub fragmentami boków. Uczniowie obserwują, co dzieje się z obwodem i polem powstałej figury, poszukują figury o największym/najmniejszym obwodzie. Najpierw swoje obserwacje mogą opierać o konkretne wymiary, potem uogólniać. Analogiczne ćwiczenie warto przenieść w przestrzeń i sklejać dwa prostopadłościany. Tym razem uczniowie będą obserwowali pole i objętość powstałej bryły i poszukiwali bryły o najmniejszym/największym polu powierzchni.

Zadanie 13. „Ramki"

Basia kupiła 8 ramek na zdjęcia. Zapłaciła za nie równo 50 zł. Ile małych i ile dużych ramek kupiła?

Liczba małych ramek ....

Liczba dużych ramek ....

CENNIK

mała ramka	6 zł
duża ramka	8 zł
mały album	9 zł
duży album	14 zł

Wymagania ogólne:
III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe:
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
- 1) czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe
- 3) dostrzega zależności między podanymi informacjami;
- 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób:
Za 8 dużych ramek zapłaciłaby $8 \cdot 8$ zł = 64 zł – za dużo.
Za 8 małych ramek zapłaciłaby $8 \cdot 6$ zł = 48 zł – za mało, ale tylko o 2 zł.
Za 7 małych ramek i 1 dużą zapłaciłaby: $7 \cdot 6$ zł + 8 zł = 42 zł + 8 zł = 50 zł – zgadza się.

Każda zamiana 1 małej ramki na 1 dużą zwiększa koszt zakupu o 2 zł, czyli nie można kupić więcej dużych ramek.
Odpowiedź: Basia kupiła 7 małych ramek i 1 dużą.

II sposób:
x – liczba małych ramek
$8 - x$ – liczba dużych ramek
$x \cdot 6 + (8 - x) \cdot 8 = 50$
$6x + 64 - 8x = 50$
$-2x = -14$
$x = 7$ – małe ramki
$8 - 7 = 1$ – duże ramki

Zadanie osadzone jest w realiach bliskich uczniom. Na pierwszy rzut oka wydaje się ono bardzo podobne do typowych zadań tekstowych rozwiązywanych w szkole podstawowej. Jednak szybko okazuje się, że standardowe metody używane w takich przypadkach zawodzą.
Na wyższych etapach kształcenia, aby rozwiązać takie zadanie wystarczy ułożyć i rozwiązać równanie lub układ równań z dwiema niewiadomymi (II przedstawiony sposób rozwiązania). Jednak w piątej klasie większość uczniów nie zna jeszcze takich narzędzi algebraicznych. A nawet jeśli je zna, to nie ma jeszcze wprawy w ich używaniu. Dlatego rozwiązanie zadania wymaga od nich zastosowania innego sposobu, polegającego na sprawdzaniu różnych możliwości (I sposób). Jeśli uczniowie nie rozwiązywali tego typu zadań na lekcji, często nie zdają sobie sprawy, że mogą zastosować taką metodę – kojarzy im się ze zgadywaniem i uważają ją za niewłaściwą.
Kolejną trudność w tym sprawdzaniu stanowi fakt, że trzeba kontrolować oba podane w zadaniu warunki: łączną liczbę kupionych przez Basię ramek oraz kwotę, którą za nie zapłaciła.

Schemat oceniania

2 punkty
kod 2.1 – Poprawna odpowiedź: 7 małych ramek i 1 duża ramka.
Ten kod przyznajemy, gdy uczeń:
- przedstawił rozwiązanie zadania i podał odpowiedź
- podał tylko odpowiedź – bez przedstawienia rozwiązania
- przedstawił tylko rozwiązanie – bez podania odpowiedzi.

Ten sam kod (2.1) przyznajemy, gdy uczeń przedstawił poprawne rozwiązanie, ale popełnił błąd nieuwagi przy wpisywaniu odpowiedzi. Na przykład:
- $7 \cdot 6$ zł $= 42$ zł, $1 \cdot 8$ zł $= 8$ zł,
  czyli razem 8 ramek za $42 + 8 = 50$ zł.
  Odpowiedź: Basia kupiła 7 dużych ramek i 1 małą.

1 punkt
kod 1.1 – Odpowiedź: 3 małe ramki i 4 duże ramki.
Dla tej odpowiedzi wydana kwota się zgadza, ale nie zgadza się łączna liczba ramek.

kod 1.2 – Poprawny sposób obliczenia liczby ramek i niepoprawna odpowiedź spowodowana błędem rachunkowym. Na przykład:
- Małe ramki: $6 \cdot 6$ zł $= 36$ zł, duże ramki: $2 \cdot 8$ zł $= 14$ zł,
  $36 + 14 = 50$ zł,
  Odpowiedź: 6 małych i 2 duże.
- $x \cdot 6 + (8 - x) \cdot 8 = 50$

$6x + 64 - 8x = 50$
$14 = 2x$
$x = 6$ – małe ramki
$8 - 6 = 2$ – duże ramki

kod 1.3 **–** Poprawnie ułożone równanie z błędnym lub niepełnym rozwiązaniem. Na przykład:

- $x \cdot 6 + (8 - x) \cdot 8 = 50$
  $6x + 64 - 8x = 50$
  $14 = 2x$
  $x = 7$

0 punktów

kod 0.1 – Błędna odpowiedź, w której zgadza się łączna liczba ramek (małe + duże = 8), ale nie zgadza się wydana kwota.

kod 0.2 – Błędne odpowiedzi, w których zgadza się wydana kwota, ale nie zgadza się łączna liczba zakupionych przedmiotów i asortyment:

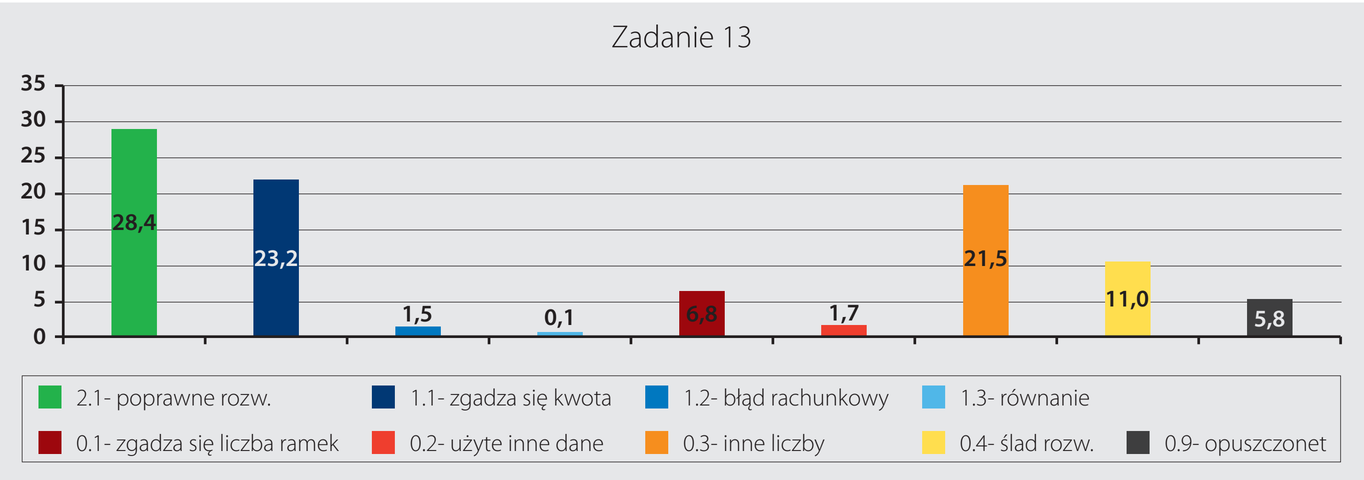
6 małych (ramek) i 1 duży (album)
lub 4 małe (albumy) i 1 duży (album)
lub 2 małe (albumy) i 4 duże (ramki).

kod 0.3 – Pozostałe błędne odpowiedzi.

kod 0.4 – Brak rozwiązania i odpowiedzi, ale pozostał ślad zajmowania się zadaniem: przekreślone obliczenia, komentarz (np. „nie wiem", „za trudne"), rysunek niezwiązany z zadaniem (np. słoneczko, buźka).

kod 9– Brak rozwiązania.

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



Ze zrozumiałych względów więcej jest uczniów opuszczających zadania otwarte niż zadania zamknięte – wybór odpowiedzi spośród podanych jest łatwiejszy niż samodzielne jej stworzenie. Tak też jest i w tym przypadku – 17% uczniów nie rozwiązało tego zadania (w tym 6% opuściło zadanie, a 11% pozostawiło jedynie ślad próby podjęcia rozwiązania). Nie świadczy to jednak o wyjątkowej trudności tego zdania – współczynnik łatwości zadania jest równy 41%, podobnie, jak w wielu zadaniach zamkniętych.

Pozostałe 83% uczniów przedstawiło rozwiązanie. Wśród nich największą grupę – 28% wszystkich rozwiązujących – stanowią ci, którzy rozwiązali zadanie prawidłowo. Uczniowie ci potrafili poradzić sobie z dwoma warunkami podanymi w zadaniu. Świadczy to o ich dużej dojrzałości – zrozumieniu

postawionego problemu i kontroli nad procesem jego rozwiązywania tak, aby nie zgubić żadnego z postawionych warunków.
Kolejne 1,5% uczniów rozwiązało zadanie poprawnym sposobem, ale podało błędną odpowiedź z powodu błędu rachunkowego (kod 1.2). Znikoma część uczniów (0,1%) ułożyła poprawne równanie opisujące przedstawioną w zadaniu sytuację, czyli poprawnie stworzyła jej matematyczny model, ale nie potrafiła tego równania poprawnie rozwiązać lub nie doprowadziła rozwiązania do końca (kod 1.3).
Zatem łącznie ok. 30% uczniów klasy V potrafi zaprojektować sposób rozwiązania nietypowego zadania, w którym w toku rozwiązania należy kontrolować jednocześnie dwa warunki.
Kolejne 23% uczniów otrzymało kod 1.1, czyli podało odpowiedź: 3 małe ramki i 4 duże. Dla takiej odpowiedzi zgadza się kwota zapłacona za ramki, ale nie zgadza się łączna liczba ramek. Oznacza to, że uczniowie poszukując rozwiązania, skupili się na trudniejszym warunku, zapominając o drugim – bardzo łatwym do sprawdzenia, jeśli tylko się o nim pamięta. Wydaje się zatem, że uczniowie ci również rozumieli postawiony problem, ale nie panują jeszcze w pełni nad całością rozwiązania i gubią niektóre warunki.
Następne 2% uczniów (kod 0.2) podało którąś z błędnych odpowiedzi: 6 małych ramek i 1 duża, 4 małe i 1 duża lub 2 małe i 4 duże. Odpowiedzi takie mogły wynikać po prostu ze złego sposobu rozwiązania. Ale mogą też świadczyć o tym, że uczniowie pomylili się w odczytywaniu podanych informacji i w swoich częściowo poprawnych obliczeniach posłużyli się cenami albumów, a nie ramek. A zatem ci uczniowie być może również potrafią zaprojektować częściowo poprawne rozwiązanie zadania, uwzględniające główną jego część, ale brakuje im uwagi.
Kolejne 7% uczniów (kod 0.1) podało odpowiedź, z której wynika, że skupili się oni wyłącznie na łącznej liczbie ramek, zupełnie tracąc z pola widzenia drugi z warunków – trudniejszy, wymagający bardziej złożonych operacji. Uczniowie ci podali po prostu dwie liczby sumujące się do 8, nie przejmując się, ile należałoby zapłacić za takie ramki. Można zatem przypuszczać, że uczniowie ci nie zrozumieli postawionego problemu.
Ostatnia duża grupa uczniów, którzy rozwiązywali to zadanie to 21,5% uczniów, którzy przedstawili zupełnie błędne lub nieukończone rozwiązanie.
Podsumowując, można powiedzieć, że:

- około 30% uczniów rozumie postawiony problem i umie zaprojektować jego rozwiązanie, uwzględniając wszystkie postawione warunki. Wśród nich:
  - 28,4% rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie
  - 1,5% zrobiło w rozwiązaniu błąd rachunkowy
  - 0,1% nie potrafiło do końca rozwiązać ułożonego poprawnie równania.
- około 25% uczniów rozumie postawiony problem, umie wyodrębnić jego kluczową część i zaprojektować jej rozwiązanie, ale gubi drugi z warunków. Wśród nich:
  - 23,2% podało odpowiedzi uwzględniając wydaną kwotę, ale gubiąc łączną liczbę ramek
  - 1,7% popełniło ten sam błąd, co uczniowie powyżej, ale dodatkowo posłużyło się w rozwiązaniu złymi cenami ramek.
- około 28% uczniów rozwiązało zadanie niepoprawnie. Wśród nich:
  - 6,8% podała liczby ramek sumujące się do 8, ale nie uwzględniła kluczowego warunku ceny
  - 21,5% podało inne, błędne rozwiązanie.
- około 17% uczniów nie podało żadnego rozwiązania zadania. Wśród nich:
  - 5,8% opuściło zadanie
  - 11% pozostawiło ślad zajmowania się zadaniem (uczniowie ci np. przepisali dane liczbowe, rozpoczęli rozwiązywanie, a później wszystko skreślili).

W zadaniach otwartych po wprowadzeniu do programu komputerowego kodu odpowiadającego rozwiązaniu ucznia, nauczyciel odpowiadał na jedno lub kilka dodatkowych pytań na temat tego rozwiązania. W tym zadaniu pytania te były zadawane tylko wtedy, gdy uczeń przedstawił swoje rozwiązanie, czyli w przypadku, gdy otrzymał kod inny niż 04 lub 09. A zatem odsetki podane dla

każdego z zagadnień omawianych poniżej, powinny sumować się do 83% (w kilku przypadkach z powodu zaokrągleń suma wynosi 84%).
Rysunek do zadania:

- wykonało 1% uczniów
- nie wykonało 82%.

Jest to zadanie typowo rachunkowe, nic więc dziwnego, że tylko 1% uczniów spróbował posłużyć się rysunkiem.

Błędy rachunkowe:

- 60% nie popełniło żadnego błędu w przedstawionych rachunkach
- 13% popełniło błąd rachunkowy
- 11% nie przedstawiło żadnych rachunków.

Warto skonfrontować te odsetki z odsetkiem osób, które otrzymały kod 1.2. Ten kod był zarezerwowany dla rozwiązań, w których uczeń w poprawny sposób obliczał liczby ramek, ale podał niepoprawną odpowiedź z powodu błędu rachunkowego. Takich rozwiązań było tylko 1,5%. Oznacza to, że pozostałe około 12% uczniów popełniło błędy rachunkowe, ale sposób obliczania przez nich liczby ramek był i tak niepoprawny. A zatem to nie błędy rachunkowe były dla większości uczniów przeszkodą w rozwiązaniu zadania.
Rozważanie różnych możliwości:

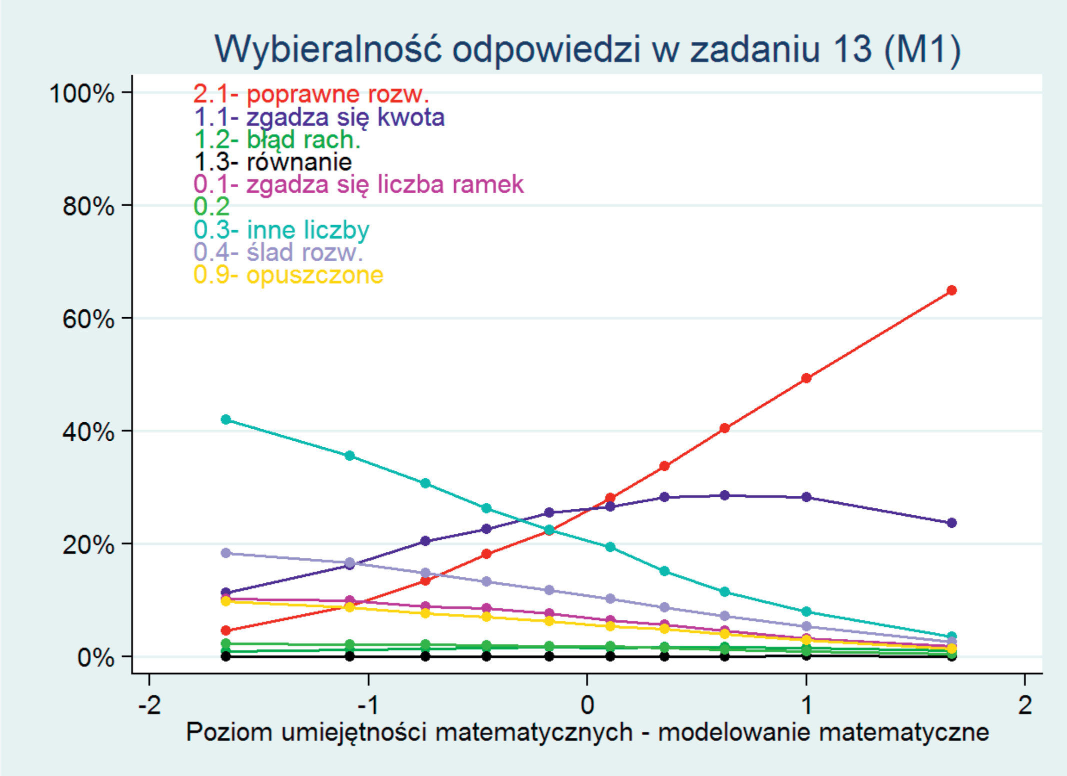
- 21% sprawdzało różne możliwości (przynajmniej dwie)
- 63% nie rozważało różnych możliwości.

To dość zaskakujące dane, zważywszy, że metoda prób i błędów jest najbardziej naturalnym i najprostszym sposobem rozwiązania tego zadania przez piątoklasistów. Dlaczego zatem tylko 21% uczniów sprawdzało różne możliwości? Może wynika to z tego, że wielu nauczycieli nie uznaje tej metody rozwiązania za poprawną? Być może zresztą więcej uczniów stosowało takie podejście, ale nie znalazło ono odbicia w ich notatkach – rachunki potrzebne do rozwiązania tego zadania są na tyle proste, że można je również wykonać w pamięci.
Wśród 21% uczniów, którzy sprawdzali różne możliwości połowa (10,7%) rozwiązała zadanie całkowicie poprawnie – to proporcjonalnie więcej niż wśród wszystkich uczniów podejmujących próbę rozwiązania tego zadania. Kolejne 4,1% podało odpowiedź spełniającą tylko warunek dotyczący wydanej kwoty (to rozwiązanie traktowaliśmy jako częściowo poprawne), 1,4% podało jako odpowiedź dwie liczby sumujące się do 8, ale nie spełniające warunku dotyczącego wydanej kwoty (rozwiązania niepoprawne), a 4% uczniów mimo sprawdzania różnych możliwości, nie znalazła takich liczb, które spełniałyby którykolwiek z podanych warunków.

Układanie równań:

- 3% ułożyło równanie lub równania
- 81% nie układało równania.

Nie zaskakuje, że tak niewielu uczniów ułożyło równanie. Umiejętności większości uczniów na tym poziomie nie pozwalają jeszcze na swobodne posługiwanie się tym narzędziem.



Warto zwrócić uwagę, że nawet wśród uczniów najlepszych tylko około 65% poprawnie rozwiązało zadanie, a około 23% udzieliło dopowiedzi uwzględniającej tylko ważniejszy warunek dotyczący łącznego kosztu zakupu, zapominając o drugim warunku lub nie umiejąc go uwzględnić. Zwraca również uwagę, że stosunkowo niewielu uczniów opuszczało to zadanie – nawet wśród najsłabszych odsetek opuszczeń wynosi tylko ok. 10%.

Rekomendacje

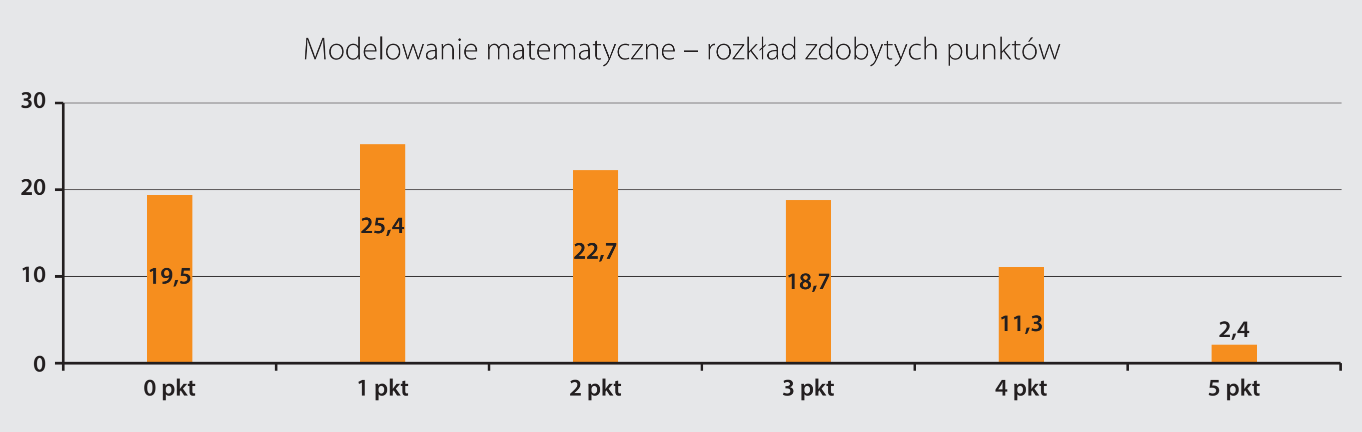
Sposób rozwiązywania zadań poprzez systematyczne rozważanie różnych możliwości i weryfikowanie ich jest w pełni poprawną metodą. Zwłaszcza gdy umiejętności algebraiczne (budowanie i rozwiązywanie równań) nie są jeszcze zbyt dobrze rozwinięte, taka metoda staje się bardzo wartościowym narzędziem. Dlatego warto stosować ją na lekcjach, o ile to możliwe, omawiając z uczniami również inne, alternatywne sposoby rozwiązania.

Warto również, żeby uczniowie mieli możliwość spotkania się na lekcjach z zadaniami, które mają więcej niż jedno rozwiązanie. W przypadku takich zadań po kilku próbach odgadnięcia rozwiązania, czy nawet po znalezieniu jednego z rozwiązań, pojawia się okazja do zadania uczniom pytania, czy znalezione rozwiązanie jest jedyne i jak można się o tym przekonać. Rodzi się wtedy naturalna potrzeba systematycznego przeglądu wszystkich możliwości, aby znaleźć wszystkie rozwiązania zadania lub potwierdzić, że innych rozwiązań już nie ma.

Modelowanie matematyczne. Podsumowanie

W zadaniach sprawdzających umiejętność modelowania matematycznego, uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 5 punktów. Wykres poniżej pokazuje rozkład uzyskanych punktów.

Z wykresu wynika, że co piąty uczeń biorący udział w badaniu, nie uzyskał w zakresie modelowania matematycznego ani jednego punktu, a zaledwie co czterdziesty zdobył wszystkie możliwe punkty w tym zakresie. Prawie 70% uczniów zdobyło w zakresie modelowania matematycznego mniej niż połowę punktów, a nieco ponad 30% więcej niż połowę. Nie jest to zatem łatwa umiejętność dla uczniów dwunastoletnich.



Warto zwrócić uwagę, że poza zadaniem 12 („bryła"), którego wynik i rozkłady odpowiedzi świadczą o tym, że uczniowie w większości nie znali jeszcze materiału, którego dotyczyło to zadanie, wszystkie pozostałe zadania sprawdzające umiejętność modelowania, miały bardzo podobne łatwości – od 40% do 42%. Bardzo podobną łatwość 45% miało także zadanie 3 („kino"), które miało sprawdzać umiejętność odczytywania i wykorzystywania informacji, a tymczasem okazało się, że głównym problemem uczniów było dobranie odpowiedniego działania arytmetycznego do przedstawionej sytuacji, czyli modelowanie. Tak podobne wyniki we wszystkich tych zadaniach zdają się świadczyć, że na poziomie klasy V tylko około 40%–45% uczniów potrafi poradzić sobie z modelowaniem.

Wnioski i rekomendacje

Odszukiwanie modeli matematycznych prostych sytuacji jest dla znacznej części uczniów klas IV–VI niezmiernie trudne, gdyż nie do końca jeszcze wyszli oni z fazy myślenia konkretno-obrazowego i posługiwanie się abstrakcyjnymi konstrukcjami stanowiącymi uogólnienia realnych czynności, stanowi dla nich znaczną trudność. W takiej sytuacji należy cierpliwie wykonywać ćwiczenia praktyczne tak dobrane, aby można było łatwo zauważyć pewne stałe cechy i doprowadzić do wyabstrahowania w umyśle ucznia uogólnionego modelu – np. w postaci równania czy wyrażenia arytmetycznego lub choćby w postaci pewnej reguły. Warto także pokazywać uczniom drogę odwrotną, czyli jak przechodzi się od ogółu, czyli modelu, do szczegółu. Można na przykład pod tym kątem skomentować często stosowany wzór na pole prostokąta albo budowane wyrażenie arytmetyczne.

5.4. IV wymaganie ogólne: Rozumowanie i tworzenie strategii

PP: „Uczeń prowadzi proste rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków, ustala kolejność czynności (w tym obliczeń) prowadzących do rozwiązania problemu, potrafi wyciągnąć wnioski z kilku informacji podanych w różnej postaci".

Różnica między rutynowymi, algorytmicznymi ćwiczeniami, a zadaniami opartymi na rozumowaniu polega na tym, że indukują one w umyśle dziecka jakościowo różne procesy. Rozwiązanie zwykłego ćwiczenia, np. rachunkowego, przebiega w umyśle ucznia mniej więcej tak, że wyszukuje on w swoim zasobie kompetencji odpowiedni schemat, czyli algorytm pozwalający mu wykonać kolejny krok przybliżający go do końcowego rozwiązania. I tak „bezpiecznie" postępując, ma gwarancję dojścia do poprawnego rezultatu. W zadaniach polegających na rozumowaniu uczeń w kolejnych krokach buduje odpowiednie wynikanie nowej racji z określonych przesłanek, dochodząc w ostatnim kroku do uzasadnianej tezy. W tym drugim przypadku sam musi sobie wytyczyć drogę, przewidując, czy

kolejne posunięcia będą korzystne, przydatne dla całego rozwiązania – krótko mówiąc musi opracować strategię. Jest to kolejna, po modelowaniu, wysoce abstrakcyjna kompetencja, z opanowaniem której uczniowie mają sporo kłopotu.
Umiejętności zawarte w tym obszarze sprawdzane były przez cztery zadania z zestawu – zadania 5, 6, 11 i 15.

Informacja do zadań 5 i 6.

W zawodach w budowaniu najwyższego domku z kart wzięło udział 12 drużyn. Każda z nich budowała swój domek przez 10 minut.

- Pierwsza drużyna rozpoczęła pracę o godzinie 10:00.
- Druga rozpoczęła po dwóch minutach, czyli o 10:02.
- Trzecia drużyna po kolejnych dwóch minutach, i tak dalej…

Zadanie 5. „Domek z kart 1”

Ile drużyn było w trakcie pracy o godzinie 10:11?

A. Trzy. B. Cztery . C.* Pięć. D. Sześć.

Zadanie 6. „Domek z kart 2”

Ostatnia drużyna zakończyła pracę o godzinie

A. 10:22 B. 10:24 C.* 10:32 D. 10:34

Wymagania ogólne:
IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

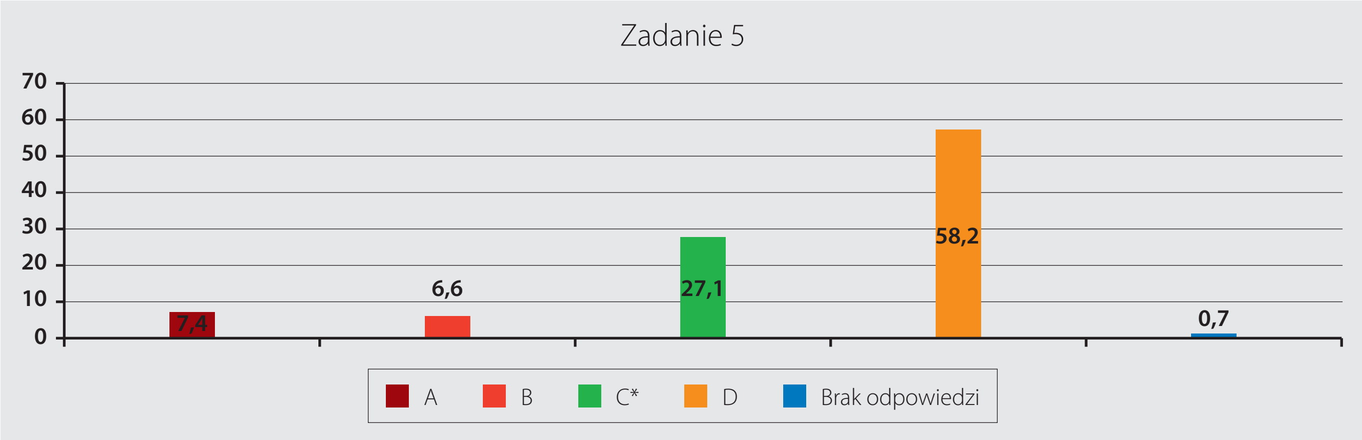
Wymagania szczegółowe:
12. Obliczenia praktyczne. Uczeń:
   3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach.
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
   3) dostrzega zależności między podanymi informacjami
   4) dzieli rozwiązanie na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania.

Do poprawnego rozwiązania zadań 5 i 6 niezbędna jest umiejętność wykonania prostych obliczeń zegarowych, ale najważniejsza jest umiejętność starannego przeanalizowania i zrozumienia reguły rządzącej uczestnictwem kolejnych drużyn w zawodach. Uczeń lepiej zrozumie tę regułę, jeśli samodzielnie rozpisze ją lub rozrysuje w najwygodniejszy dla siebie sposób. Może to być wypisanie kolejno godzin rozpoczęcia i zakończenia pracy przez kilka pierwszych drużyn. Patrząc na wypisane (np. w tabeli) godziny uczeń może zauważyć ogólną regułę pozwalającą obliczyć godzinę rozpoczęcia lub zakończenia pracy przez dowolną drużynę. Jeśli jednak uczeń nie potrafi jeszcze jasno sformułować tej ogólnej prawidłowości, może po prostu wypisać kolejno wszystkie drużyny – w ten sposób także uzyska poprawne odpowiedzi do obu zadań.

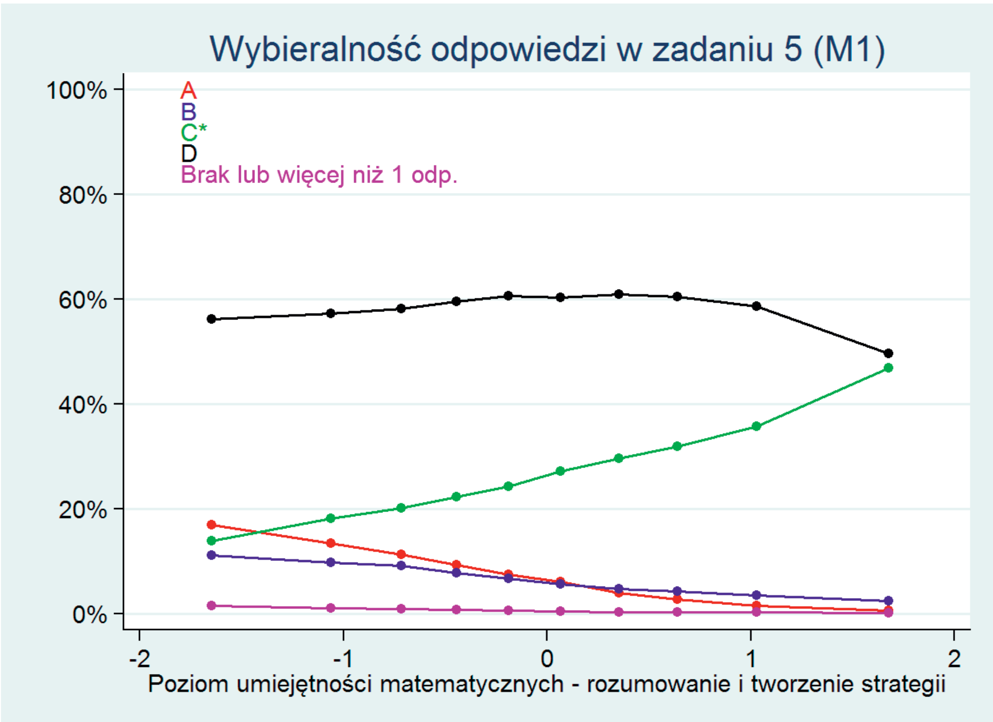
Zadanie 5.

Wykres pokazuje, że w zadaniu 5. ponad dwukrotnie więcej uczniów wybrało niepoprawną odpowiedź D (Sześć) niż poprawną C (Pięć).
Pozostałe dwie błędne odpowiedzi wybierał niewielki odsetek uczniów. Ci, którzy wybrali odpowiedź B (Cztery), mogli nie wziąć pod uwagę czasu rozpoczęcia pracy pierwszej drużyny i liczyli od 10:02. Odpowiedź A (Trzy) mogła mieć przyczynę w nieuważnym czytaniu treści zadania (lista

rozpoczynających pracę drużyn kończy się na trzeciej drużynie, po czym następuje, przeoczone przez ucznia „i tak dalej …").



Poprawna odpowiedź na pytanie wymaga uważnej analizy podanych informacji. Uczeń nie może skoncentrować się tylko na tym, że co dwie minuty pracę zaczyna nowa drużyna, ale musi zauważyć też i pamiętać, że począwszy od 10:10 niektóre drużyny kończą pracę. Właśnie ci uczniowie, którzy przeoczyli ten drugi warunek, otrzymywali niepoprawną odpowiedź D. Jak trudne dla uczniów było pamiętanie o tym warunku, pokazuje wykres wybieralności, z którego wynika, że na każdym poziomie, a więc również wśród uczniów najlepszych, błędna odpowiedź D była najpopularniejsza. Okazuje się zatem, że w tym zadaniu, podobnie, jak w zadaniu 13 (Ramki) najtrudniejsze dla uczniów było jednoczesne uwzględnianie w rozwiązaniu kilku informacji i nie zgubienie żadnej z nich.

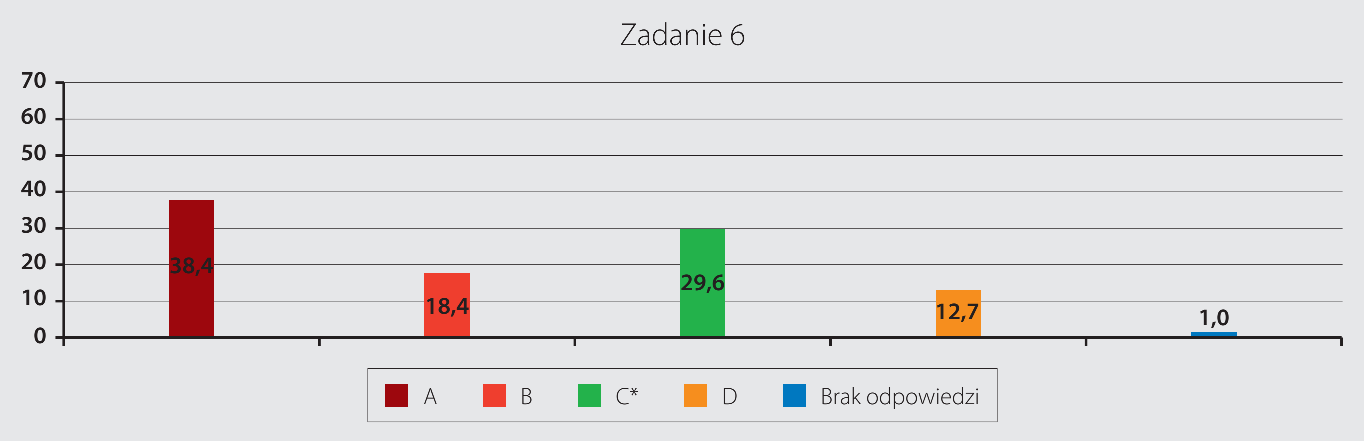


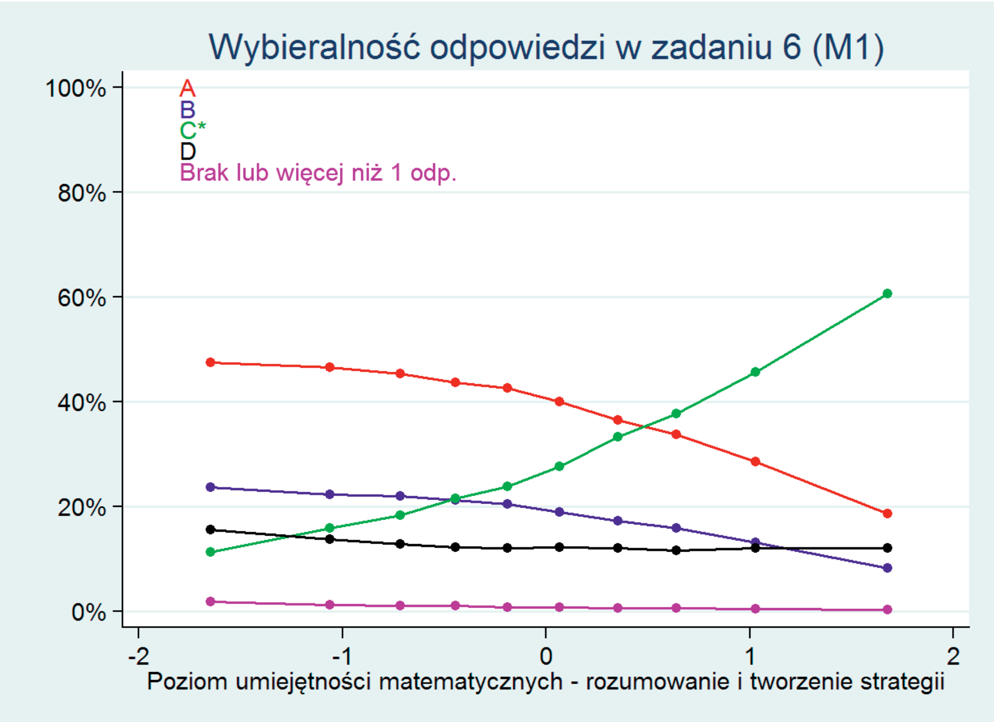
Zadanie 6.

Kluczową umiejętnością dla poprawnego rozwiązania zadań 5 i 6 było dobre zrozumienie, przeanalizowanie i wyciągnięcie wniosków z informacji podanych we wstępie do obu zadań. Procent uczniów, którzy odpowiedzieli poprawnie na pierwsze z tych zadań (27%) jest bardzo bliski procentowi uczniów, którzy podali dobrą odpowiedź na drugie z nich (30%).

W zadaniu 6 rozkład błędnych odpowiedzi jest bardziej zróżnicowany niż w zadaniu 5, gdzie dominowała jedna błędna odpowiedź. Jednak i w tym zadaniu więcej uczniów udzieliło niepoprawnej odpowiedzi A (10:22) niż poprawnej C. Drugą najczęściej wybieraną niepoprawną odpowiedzią była odpowiedź B (10:24). Obie te odpowiedzi A (10:22) i B (10:24) mają wspólną przyczynę: uczniowie znajdowali czas rozpoczęcia pracy ostatniej drużyny, zamiast czasu zakończenia – łącznie ten błąd popełniło prawie 57% uczniów. Należy zauważyć, że ci uczniowie, którzy podali odpowiedź A, znaleźli ten czas poprawnie (10:22 to rzeczywisty czas rozpoczęcia pracy przez dwunasty zespół), a ci, którzy podali odpowiedź B nie uwzględnili faktu, że pierwszy zespół zaczynał pracę o 10:00 – mechanicznie wykonali działanie 12 · 2 i dodali wynik do godziny 10:00. Zatem uczniowie, którzy podali odpowiedź B, popełnili aż dwa błędy.

Najmniejsza, ale jednak pokaźna grupa uczniów wybrała błędną odpowiedź D. (10:34). Ci uczniowie nie zapomnieli o doliczeniu czasu pracy ostatniej drużyny, lecz źle obliczyli początek rozpoczęcia pracy przez tę drużynę. Zatem łącznie ponad 31% uczniów (odpowiedzi B i D) nie potrafiło poprawnie określić czasu rozpoczęcia pracy przez ostatnią drużynę.





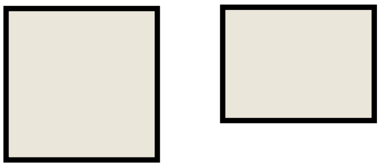
Wykres wybieralności pokazuje, że dopiero trzy górne decyle, czyli 30% uczniów najlepszych, częściej wybierało w tym zadaniu odpowiedź poprawną niż błędne. Jednak nawet wśród tych uczniów każda z błędnych odpowiedzi była wybierana przez znaczny odsetek uczniów. Ciekawe, że wśród uczniów najsłabszych poprawna odpowiedź C była najrzadziej wybierana spośród wszystkich możliwych.

Rekomendacje

Tak duży odsetek niepoprawnych odpowiedzi udzielanych w zadaniach 5 i 6 świadczy o braku umiejętności analizowania i wyciągania wniosków z kilku informacji, które należy jednoczenie brać pod uwagę. Być może piątoklasistom brakuje jeszcze doświadczenia w tak złożonych, jak na ich wiek rozumowaniach. Omawiając to zadanie w klasie warto podkreślić (po raz kolejny) pomoc, jaką może służyć rysunek, tabela lub diagram (np. oś czasu). Po omówieniu tego zadania w klasie można także zachęcić uczniów do formułowania kolejnych pytań dotyczących opisanej sytuacji, a następnie do samodzielnego wymyślania zadań zawierających podobne reguły postępowania. Co również jest istotne, tego rodzaju zajęcie – wymyślanie własnych zadań czy pytań – daje szanse uczniom, którzy na co dzień nie są zbyt aktywni na lekcjach matematyki.

Zadanie 11. „Siatka"

Siatka prostopadłościanu składa się z kwadratów o boku 4 cm i prostokątów o wymiarach 4 cm × 3 cm, takich jak na rysunku poniżej.



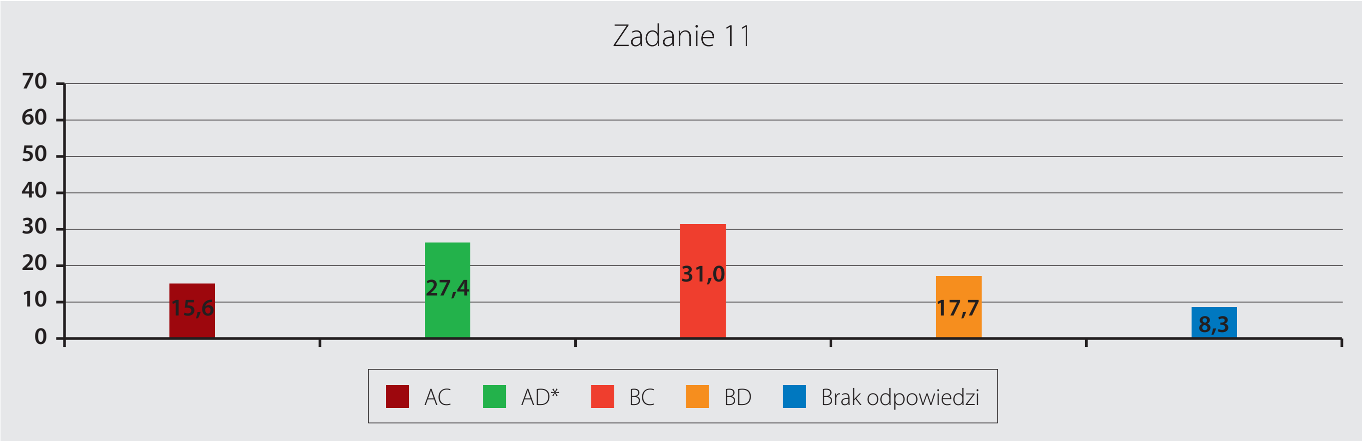
Podaj poprawne odpowiedzi na pytania. Wybierz odpowiedzi spośród A lub B oraz C lub D.

Ile ścian tego prostopadłościanu ma kształt kwadratu?	A.* 2	B. 4
Jaka jest objętość tego prostopadłościanu?	C. 36 cm^3	D.* 48 cm^3

Wymagania ogólne:
IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe:
10. Bryły. Uczeń:
    4) rysuje siatki prostopadłościanów.
11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
    4) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi.

Z rozwiązaniem tego zadania nie powinni mieć problemów uczniowie, którzy mieli okazję zajmować się figurami geometrycznymi, bryłami i ich siatkami.
Uczniowie ci intuicyjnie wiedzą, że w każdym prostopadłościanie przeciwległe ściany są identyczne. Skoro więc w siatce tej bryły jest jeden kwadrat, to musi być jeszcze co najmniej jeden. Każdy uczeń oswojony z figurami przestrzennymi, bez trudu zauważy także, że gdyby był tam jeszcze jeden, trzeci kwadrat, to wtedy wszystkie ściany tego prostopadłościanu musiałyby być kwadratami. A to jest niemożliwe, bo wiemy, że któraś ściana jest prostokątem. A zatem w tej bryle są tylko dwie ściany kwadratowe.
Innym sposobem rozwiązania, również bardzo łatwym dla uczniów, którzy mają wprawę w operowaniu figurami, jest zbudowanie siatki prostopadłościanu z podanych figur. Szybko okazuje się, że można to zrobić tylko wykorzystując do zbudowania tej siatki 2 kwadraty i 4 prostokąty.
Uczeń z doświadczeniem w rozwiązywaniu zadań geometrycznych może też ustalać wymiary prostopadłościanu, korzystając z wymiarów czworokątów: jedna ściana 4 x 4, inna ściana 4 x 3, więc cały prostopadłościan 4 x 4 x 3.
Po rozwiązaniu pierwszej części zadania, część druga jest dość rutynowa i wymaga tylko podstawienia odpowiednich liczb do znanego wzoru.

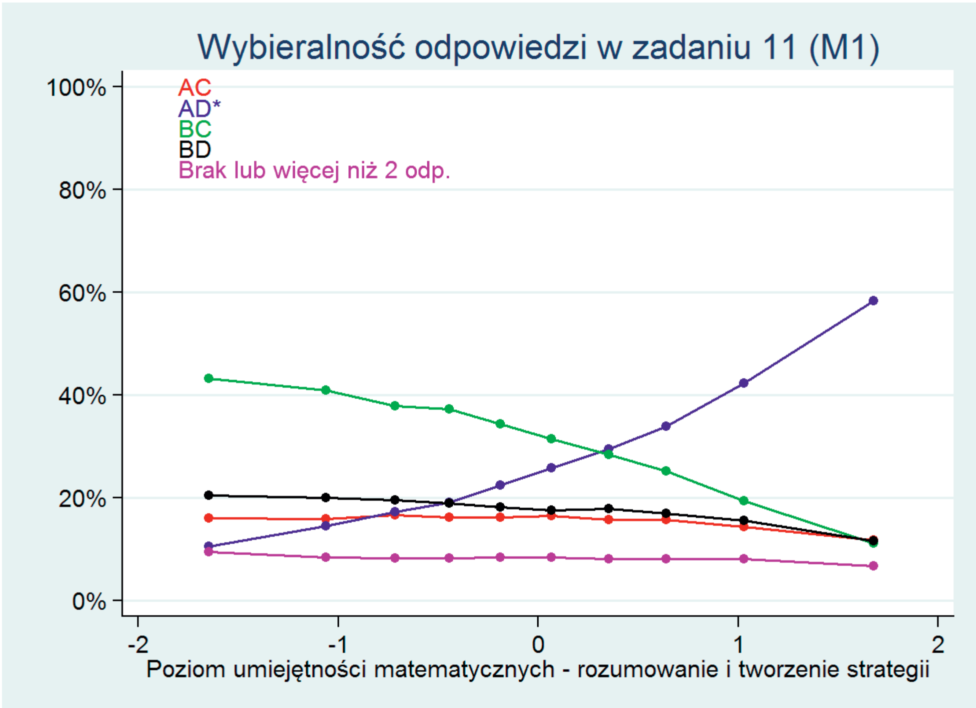


Zadanie zostało poprawnie rozwiązane (tzn. poprawnie rozwiązane obie części zadania) przez 27% uczniów.

Pierwszą część zadania rozwiązało poprawnie 43% uczniów, a drugą – 45% uczniów.

Błędne odpowiedzi wybierało odpowiednio: w pierwszej części zadania – 49%, w drugiej części zadania – 47% uczniów.

Do rozwiązania pierwszej części zadania nie przystąpiło 4% uczniów, a drugiej części – 8%.



W zadaniu tego typu (dwukrotny wybór pomiędzy dwiema możliwościami) rozwiązanie uznawane jest za poprawne tylko gdy oba wybory dokonane są prawidłowo. Takich odpowiedzi udzieliło tylko 27% uczniów. Byli to prawie wyłącznie uczniowie o średnich i wyższych umiejętnościach – wśród uczniów najsłabszych poprawna odpowiedź była najrzadziej wskazywana spośród wszystkich możliwych. Trzeba również zauważyć, że odpowiedź BC, która była wybierana najczęściej i przez uczniów słabych, i przez średnich zawiera błędne odpowiedzi na oba postawione w zadaniu pytania.

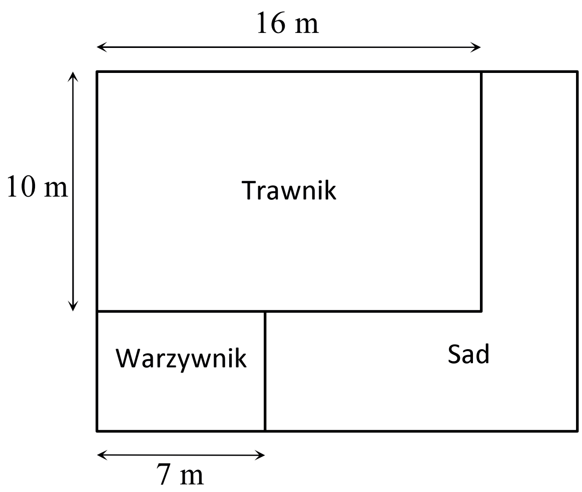
Co mogło być przyczyną tak niskiej rozwiązalności? Nauka o bryłach realizowana jest często w klasie piątej, ale dopiero pod koniec roku szkolnego, dlatego uczniowie nie mieli jeszcze zbyt wielu okazji, aby dokładniej zaznajomić się z prostopadłościanami – poznać ich cechy czy budować je z odpowiednich siatek. Widzą oni często tę bryłę jako swoistą całość, bez wyodrębniania ścian czy krawędzi i relacji między ich położeniem albo wymiarami. Stąd znaczna trudność we wnioskowaniu o wyglądzie poszczególnych ścian i liczbie ścian określonego kształtu. Ponadto do dokonania poprawnych wyborów niezbędna jest wyobraźnia dynamiczna pozwalająca stworzyć myślowy model bryły opisanej w zadaniu. Jest to jednak abstrakcyjna umiejętność, niedostępna jeszcze wszystkim dwunastolatkom.

Rekomendacje

Zasadnicza trudność tego zadania nie polega na skomplikowanych rachunkach albo poszukiwaniu kolejnych danych. Tu najtrudniejsze dla ucznia było zbudowanie w wyobraźni prostopadłościanu – ustalenie, jakimi czworokątami są pozostałe cztery ściany tej bryły. Kształcenie takiej wyobraźni przestrzennej jest dydaktycznie niełatwym przedsięwzięciem. Należy stwarzać uczniom dużo różnorodnych okazji do manipulowania figurami, budowania z nich innych figur lub brył – dowolnych lub zadanych przez nauczyciela oraz umożliwić im korzystanie z różnorodnych siatek brył. Bardzo korzystne dydaktycznie jest również odwrócenie sytuacji – rozcinanie papierowych modeli bryły tak, aby otrzymać ich siatki.

Zadanie 15. „Sad”

Prostokątna działka o wymiarach 20 m x 15 m podzielona jest na trzy części tak, jak na rysunku obok (trawnik i warzywnik są prostokątami). Jaką część działki zajmuje sad?
Odpowiedź podaj w postaci ułamka.



Wymagania ogólne:
IV. Rozumowanie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe:
4. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:
   1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka.
11. Obliczenie w geometrii. Uczeń:
   2) oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych.
14. Zadania tekstowe. Uczeń:
   4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania.

Rozwiązanie

Za poprawnie rozwiązane zadanie uczeń może otrzymać 4 punkty.
Rozwiązanie zadania składa się z trzech części – część 1 i 2 mogą być od siebie niezależne i mogą być wykonanie w dowolnej kolejności.

1. część:

Obliczenie pola powierzchni działki: $20 \cdot 15 = 300$ m^2

Za tę część rozwiązania uczeń może otrzymać 1 punkt.

2. część:

Obliczenie pola powierzchni sadu.

Za tę część rozwiązania uczeń może otrzymać 2 punkty.

Pole powierzchni sadu można obliczyć na dwa sposoby:

I sposób:

odejmując od pola działki pola trawnika i warzywnika:

Trawnik ma powierzchnię: $10 \cdot 16 = 160$ m^2

Warzywnik ma powierzchnię: $7 \cdot (15 - 10) = 35$ m^2

Sad ma powierzchnię: $300 - 160 - 35 = 105$ m^2

Przy tym sposobie rozwiązania uczeń otrzymuje:

- 1 punkt za obliczenie pola warzywnika
- 1 punkt za obliczenie pola trawnika i odjęcie od pola działki pól trawnika i warzywnika.

Za obliczenie pola powierzchni trawnika, bez żadnych dalszych obliczeń dotyczących sadu uczeń nie otrzymuje punktu.

II sposób:

dzieląc sad na części, na przykład:

Górna prostokątna część sadu: $(20 - 16) \cdot 10 = 40$

Dolna prostokątna część sadu: $(20 - 7) \cdot (15 - 10) = 13 \cdot 5 = 65$

Łączna powierzchnia sadu: $40 + 65 = 105$ m^2

Przy tym sposobie rozwiązania uczeń otrzymuje:

- 1 punkt za obliczenie pola jednej części sadu
- 1 punkt za obliczenie pola drugiej części sadu oraz zsumowanie obu obliczonych pól.

Sad można podzielić na części również w inny sposób (3 prostokąty, 2 trapezy itd.).

W każdym z tych sposobów uczeń otrzymuje:

- 1 punkt za obliczenie pola jednej części sadu
- 1 punkt za obliczenie pól pozostałych części sadu oraz zsumowanie ich.

Nie przyznajemy punktów za zwymiarowanie rysunku lub podzielenie sadu na części i zwymiarowanie ich – bez dalszych obliczeń.

3. część:

Obliczenie, jaką częścią działki jest sad: $\frac{105}{300}$ lub $\frac{35}{100}$ lub $\frac{21}{60}$ lub $\frac{7}{20}$ lub $0{,}35$

Za tę część rozwiązania uczeń może otrzymać 1 punkt.

Uwagi:

1. Jeśli uczeń popełni błędy rachunkowe, to niezależnie od ich liczby za całe rozwiązanie przyznajemy o 1 punkt mniej, niż za odpowiednie rozwiązanie bez błędów.
2. Błędy w zapisie, takie jak na przykład $300-195=105=\frac{105}{300}=\frac{21}{60}$, traktujemy jak błędy rachunkowe.
3. Błędy w wymiarowaniu części działki traktujemy jak błędy rachunkowe.
4. Nie odejmujemy punktów za:
   - brak słownej odpowiedzi do zadania
   - odpowiedź podaną w formie nieskróconego ułamka
   - błędne skrócenie poprawnie zapisanego ułamka
   - brak jednostek lub niewłaściwe jednostki (cm^2) użyte w rozwiązaniu
   - błędy rachunkowe popełnione w części rozwiązania, która nie jest oceniana (dodatkowe obliczenia niewymagane w zadaniu, zarzucony fragment rozwiązania itp.)

Aby rozwiązać zadanie, należy najpierw obliczyć pole całej działki oraz pole sadu. Wymiary działki podane są w treści zadania, a pozostałe informacje potrzebne do obliczenia powierzchni sadu uczeń musi odczytać z rysunku. Główna trudność tkwi w tym, że sad nie ma kształtu prostokąta i do obliczenia jego powierzchni uczeń musi wybrać odpowiednią strategię. Może albo podzielić sad na kawałki (na dwa prostokąty, dwa trapezy lub jeszcze inaczej) i obliczyć pole każdego z nich, albo od powierzchni działki odjąć powierzchnie trawnika i warzywnika. Jest to dobry przykład zadania do pracy na lekcji, ponieważ każdy uczeń może w inny sposób spojrzeć na tę samą figurę i tym samym poprowadzić swoje rozumowanie inną drogą.

Schemat oceniania

4 punkty *(całość)*

kod 4.1 – Poprawne obliczenia i poprawna odpowaiedź $\frac{105}{300}$ lub $\frac{35}{100}$ lub $\frac{21}{60}$ lub $\frac{7}{20}$ lub $0,35$

3 punkty

kod 3.1 – Poprawny sposób obliczenia, jaką częścią działki jest sad, ale z błędami rachunkowymi (jednym lub więcej). *(całość z błędami rachunkowymi)*

kod 3.2 – Poprawne obliczenie powierzchni działki (300 m^2) oraz powierzchni sadu (105 m^2). Brak dalszych obliczeń lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. (*część 1 i 2, części 3 brak lub jest niepoprawna*). Na przykład:

- cała działka: 300 m^2, cały sad: 105 m^2, stosunek: $\frac{300}{105}=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}$.

kod 3.3 – Poprawne obliczenie powierzchni działki (300 m^2), obliczenie powierzchni sadu z błędem innym niż rachunkowy oraz poprawne obliczenie, jaką częścią powierzchni działki jest wyznaczona powierzchnia sadu. (*część 1 i 3, część 2 częściowo niepoprawna*).

Na przykład:

- cała działka: $20 \cdot 15 = 300$ m^2, pionowa część sadu: $4 \cdot 15 = 60$ m^2, pozioma część sadu: $5 \cdot 13 = 65$ m^2, razem sad: 125 m^2, stosunek: $\frac{125}{300}=\frac{5}{12}$.

2 punkty

kod 2.1 – Poprawny sposób obliczenia powierzchni działki oraz sadu, ale z błędami rachunkowymi. Brak dalszych obliczeń lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. (*część 1 i 2 z błędami rachunkowymi*)

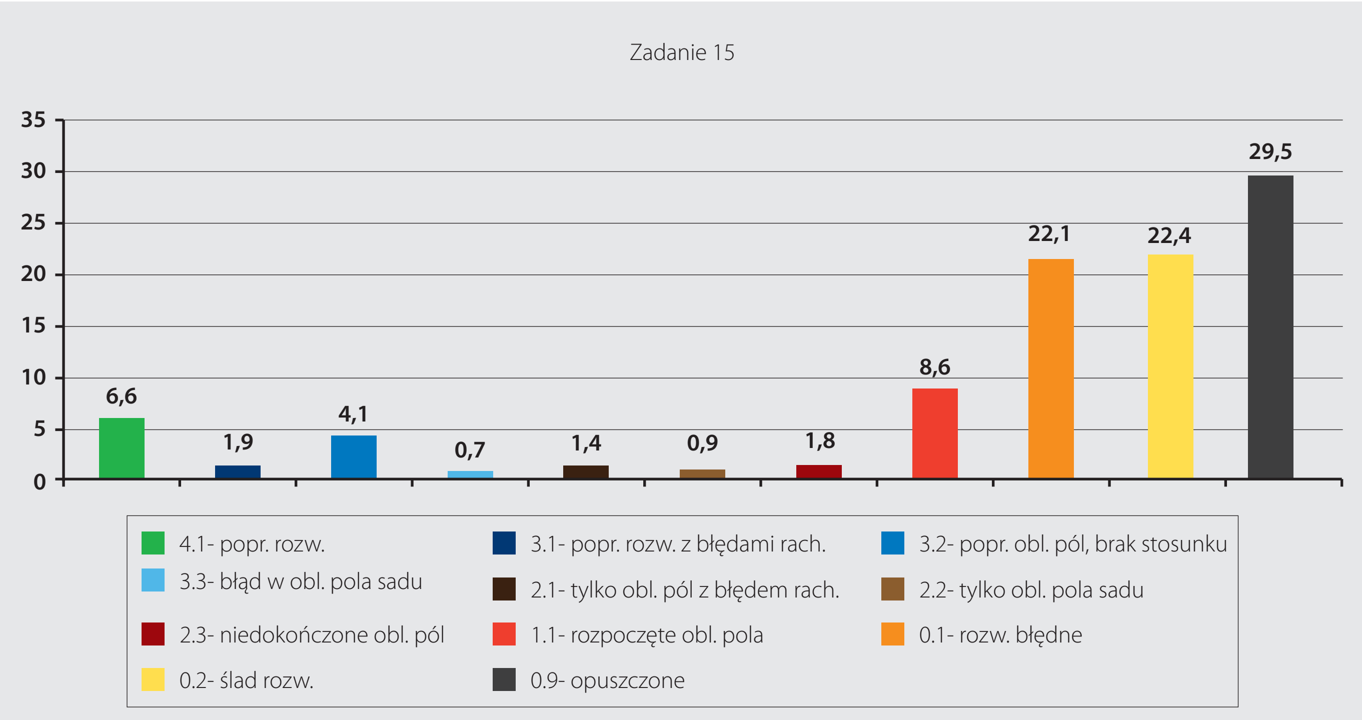
kod 2.2 – Poprawne obliczenie powierzchni sadu (105 m^2). Brak dalszych obliczeń lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. (*tylko część 2*)
kod 2.3 – Poprawne obliczenie powierzchni działki (300 m^2) oraz powierzchni warzywnika (35 m^2) lub powierzchni jednej części sadu. Brak dalszych obliczeń lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. (*część 1 oraz częściowo 2*). Na przykład:

- cała działka: $20 \cdot 15 = 300$ m^2, warzywnik: $7 \cdot 5 = 35$ m^2.
- cała działka: $20 \cdot 15 = 300$ m^2, pionowa część sadu: $4 \cdot 15 = 60$ m^2.
- cała działka: $20 \cdot 15 = 300$ m^2, pionowa część sadu: $4 \cdot 15 = 60$ m^2,
- pozioma część sadu: $5 \cdot 13 = 65$ m^2, razem sad: 125 m^2.

1 punkt
kod 1.1 – Poprawne obliczenie powierzchni działki (300 m^2) lub powierzchni warzywnika (35 m^2) lub powierzchni jednej części sadu. Brak dalszych obliczeń lub zawierają one błędy inne niż rachunkowe. (*część 1 albo częściowo 2*)

0 punktów
kod 0.1 – Rozwiązanie błędne.
kod 0.2 – Brak rozwiązania, ale pozostał ślad zajmowania się zadaniem: przekreślone obliczenia, komentarz (np. „nie wiem", „za trudne"), rysunek niezwiązany z zadaniem (np. słoneczko, buźka).
kod 9 – Zadanie opuszczone – brak śladu zajmowania się zadaniem.

Uzyskane wyniki i ich interpretacja



Było to zdecydowanie najtrudniejsze zadanie w zestawie – jego łatwość była równa zaledwie 0,16. Oznacza to, że uczniowie zdobyli za nie tylko 16% możliwych punktów. Pewne znaczenie może tu mieć fakt, że było to ostatnie zadanie w zestawie i zapewne części uczniów zabrakło czasu na podjęcie próby jego rozwiązania. Dotyczyć to może aż 30% uczniów.

Poziomy rozwiązania zadania:

- niespełna 7% uczniów rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie i uzyskało za swoje rozwiązanie 4 punkty

- 19% rozwiązało je częściowo poprawnie i uzyskało 3, 2 lub 1 punkt
- kolejne 45% uczniów podjęło próbę rozwiązania, ale przedstawiło rozwiązania zupełnie błędne lub wycofało się z rozwiązywania
- ostatnie 30% uczniów nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 15 było typowym zadaniem wieloetapowym. Na 19% uczniów, którzy uzyskali częściowe, punktowane rezultaty, składa się prawie 9% uczniów, którzy poprzestali na obliczeniu pola jednego z prostokątów występujących w zadaniu i nie potrafili wykonać następnego kroku (ci uczniowie uzyskali 1 punkt). Kolejne 4% uczniów wykonało ten krok: obliczyło którąś z brakujących długości boków prostokątów i obliczyło powierzchnię warzywnika lub części sadu (ci uczniowie uzyskali 2 punkty). Następne 4% uczniów zatrzymało się tuż przed końcem rozwiązania – poprawnie obliczyli wszystkie potrzebne powierzchnie, ale prawdopodobnie nie do końca zrozumieli polecenie „Jaką częścią czegoś jest coś", ponieważ nie obliczyli stosunku pól lub odpowiadali na to pytanie „na oko" na podstawie rysunku, pisząc, że sad zajmuje 1/3 działki (ci uczniowie uzyskali 3 punkty).
Jednym z częstszych błędów popełnianych przez uczniów, było obliczanie obwodów przedstawionych figur, zamiast ich pól. Taki błąd powodował, że całe przedstawione rozwiązanie było błędne i uczeń otrzymywał 0 punktów. Ciekawą odmianą tego błędu były zaobserwowane przypadki, gdy ten sam uczeń dla niektórych prostokątów liczył pole poprawnie, jako iloczyn boków, a dla innych niepoprawnie – myląc pole z obwodem. Można próbować wytłumaczyć tę niespójność myślenia w ten sposób, że pewne sposoby zapisu danych kojarzą się uczniom z działaniem mnożenia, a inne z obliczaniem obwodu, czyli dodawaniem. W tym zadaniu wymiary całej działki były podane w tekście zadania tak: „działka o wymiarach 20 m x 15 m". Taki sposób zapisu wymiarów przypomina zapis mnożenia, więc powierzchnie działki uczeń obliczał prawidłowo. Natomiast wymiary części działki (trawnika i warzywnika) podane były obok boków na rysunku. Taki zapis prawdopodobnie bardziej kojarzy się z sumowaniem odcinków, czyli obliczaniem obwodu.

Informacje omawiane poniżej pochodzą od nauczycieli, odpowiadających na dodatkowe pytania na temat rozwiązań uczniów.

Błędy rachunkowe:
- 35% nie popełniło żadnego błędu w przedstawionych rachunkach
- 15% popełniło błąd rachunkowy
- pozostałe 50% nie przedstawiło żadnych obliczeń, w których można by popełnić błąd rachunkowy.

Warto skonfrontować te odsetki z odsetkami osób, które otrzymały kody 3.1 lub 2.1. Były to kody zarezerwowane dla rozwiązań, w których uczeń przedstawił całkowicie poprawny sposób rozwiązania (kod 3.1) lub niepełny, ale również poprawny sposób rozwiązania (kod 2.1), ale podał niepoprawną odpowiedź z powodu błędu rachunkowego. Takich rozwiązań było tylko 1,9% dla kodu 3.1 i kolejne 1,4% dla kodu 2.1. Oznacza to, że pozostałe około 12% uczniów popełniło błędy rachunkowe, ale sposób rozwiązania przez nich zadania był i tak niepoprawny. Co ciekawe, jest to identyczny odsetek uczniów popełniajacych błędy rachunkowe, jak w zadaniu 13, w którym również pytaliśmy o to nauczycieli. A zatem podobnie, jak w zadaniu 13, to nie błędy rachunkowe były dla uczniów przeszkodą w rozwiązaniu tego zadania.

Sposób obliczenia pola powierzchni sadu:
- 19% odejmowało od powierzchni działki powierzchnię trawnika i warzywnika (sposób I)
- 9% dzieliło sad na części i dodawało ich powierzchnie (sposób II)
- 22% nie przedstawiło sposobu obliczenia powierzchni.

W tego typu zadaniach (obliczanie pola figur o nietypowych kształtach) zwykle można zastosować dwa podejścia: obliczyć szukane pole jako różnicę między polami typowych figur (sposób I) lub jako sumę pól typowych figur, na które da się podzielić omawianą figurę (sposób II). Interesujące wydaje się, że zdecydowaną przewagę (19% do 9%) miał I sposób. Również uczniowie, którzy rozwiązali zadanie całkowicie poprawnie, zdecydowanie częściej wykorzystywali I sposób (5%) niż II (1,6%).

Obliczenie długości odcinków użytych do obliczenia powierzchni sadu:

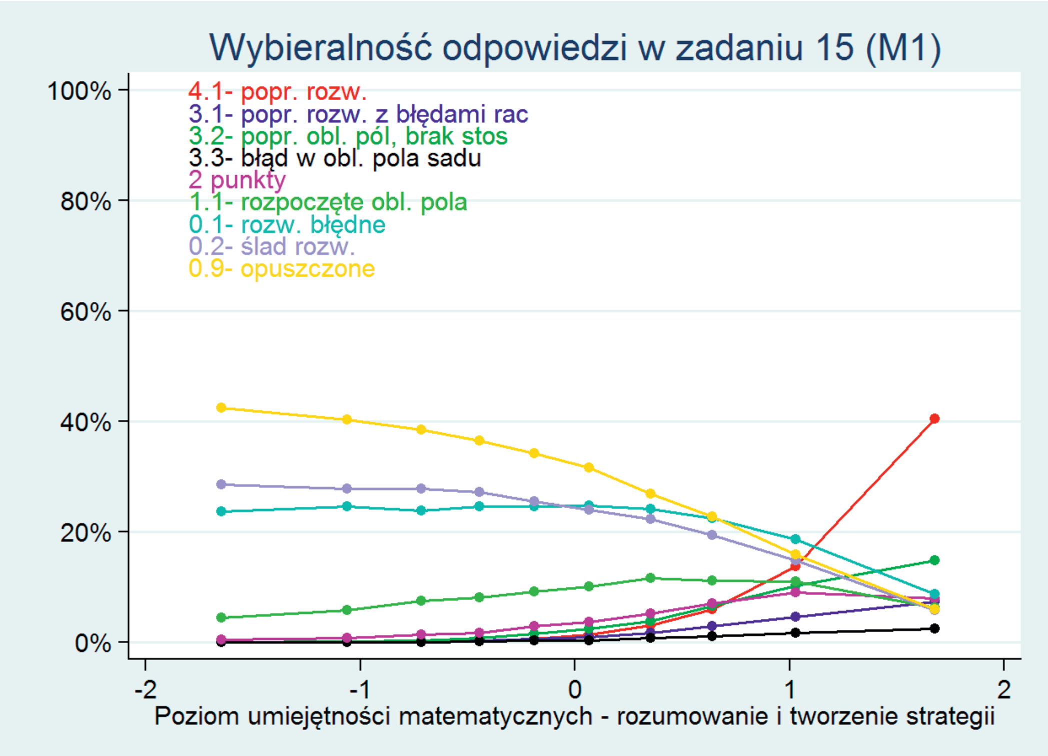
- 27% poprawnie ustaliło długości odcinków
- 10% błędnie ustaliło te długości
- 14% nie ustaliło długości odcinków.

Ważnym elementem rozwiązania tego zadania było ustalenie długości odcinków potrzebnych do obliczenia pól (szerokości warzywnika lub wymiarów prostokątów, na które można podzielić sad). Chociaż wydawało się to prostym zadaniem, 10% uczniów nie zrobiło tego poprawnie, a kolejne 14%, mimo że zaczęło rozwiązywać zadanie, nie podjęło nawet próby obliczenia tych długości. Być może było to spowodowane faktem, że część potrzebnych danych przedstawionych było na rysunku, a część w tekście zadania.

Zapisanie stosunku powierzchni sadu do powierzchni działki:

- 13% poprawnie ustaliło stosunek powierzchni sadu do powierzchni działki (niezależnie od poprawności obliczonych powierzchni)
- 20% błędnie ustaliło ten stosunek (niezależnie od poprawności obliczonych powierzchni)
- 18% nie podjęło próby ustalenia stosunku powierzchni sadu do powierzchni działki.

Porównajmy te dane z odsetkami uczniów, którzy uzyskali określone kody.
I tak: 13% uczniów poprawnie ustaliło stosunek powierzchni, ale tylko 6,6% uczniów poprawnie rozwiązało całe zadanie (kod 4.1), czyli w szczególności poprawnie obliczyli powierzchnie, których stosunek badali. Zatem pozostałe 6,4% uczniów potrafiło poprawnie obliczyć stosunek, ale nie potrafiło bezbłędnie obliczyć powierzchni.
Z kolei spośród 20% uczniów, którzy błędnie zapisałi stosunek obliczonych powierzchni, co najwyżej 4% poprawnie obliczyło te powierzchnie (kod 3.2). Pozostałe 16% uczniów źle zapisało stosunek, ale również źle obliczyło powierzchnie. Zatem wyraźnie większym problemem w tym zadaniu było dla uczniów poprawne obliczenie powierzchni sadu i działki, niż obliczenie, jaką częścią jednego jest drugie.
Na powyższym wykresie kody 2.1, 2.2 i 2.3, za które uczeń otrzymywał 2 punkty zostały połączone, ponieważ każdy z nich otrzymało mniej niż 2% uczniów, więc rysowanie oddzielnej linii dla każdego z nich tylko zaciemniałoby obraz.
Wykres pokazuje, co łatwo odgadnąć, patrząc na odsetki uczniów uzyskujących jakiekolwiek punkty w tym zadaniu, że uczniowie słabsi z reguły opuszczali to zadanie, rozpoczynali jego rozwiązanie i porzucali je lub przedstawiali rozwiązania całkowicie błędne. Zaledwie ok. 5% tych uczniów zdobyło 1 punkt, czyli obliczyło powierzchnię jednego z prostokątów (np. całej działki). Wśród uczniów o średnim poziomie umiejętności nadal zdecydowana większość otrzymuje 0 punktów, ale już około 10% – 1 punkt i minimalny odsetek 2 punkty. Wykres pokazuje także, że nawet w dziewiątym (bardzo wysokim) decylu mniej było osób, które podały poprawne rozwiązanie niż tych, którzy nie podjęli w ogóle rozwiązania, czy tych, którzy podali je zupełnie błędnie. Wśród najlepszych uczniów (dziesiąty decyl) odsetki uczniów, którzy otrzymali 0 punktów znacznie spadają i są niższe niż 10%, ale w pełni poprawną odpowiedź dała mniej niż połowa (40%) spośród tych najlepszych piątoklasistów.



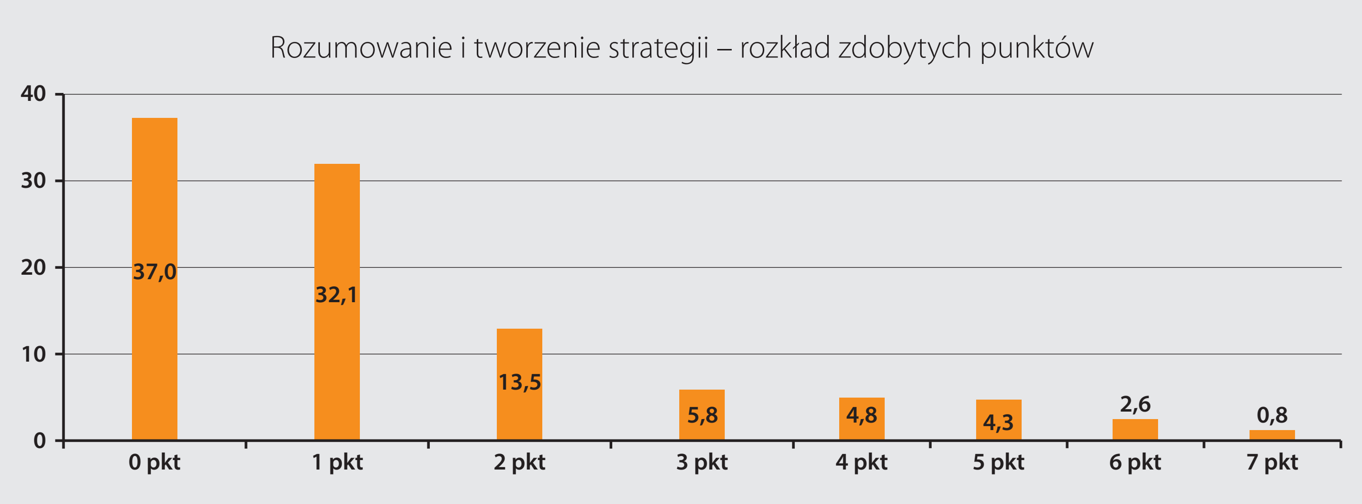
Rekomendacje

Kolejne zadanie wieloetapowe w tym zestawie pokazało, że uczniowie mają z nimi istotne kłopoty. Utworzenie logicznego ciągu operacji, wykorzystującego informacje dane w zadaniu i prowadzącego do rozwiązania, jest czynnością trudną i wymagającą sporego doświadczenia. Piątoklasiści z pewnością jeszcze nie do końca są wprawieni w tego typu czynnościach. Większość zadań ćwiczeniowych rozwiązywanych w toku procesu dydaktycznego to krótkie formy, wymagające jednego, dwóch kroków. Dłuższe rozumowania pojawiają się rzadko – wyniki tego zadania pokazują, że chyba za rzadko. Uczniowie często są w stanie wykonać poprawnie pojedyncze kroki, ale nie potrafią wiązać tych kroków w całość. Warto stawiać uczniów przed takimi wyzwaniami. Zadania wieloetapowe zwykle odbiegają od rutynowych zadań ćwiczeniowych. Uczą one nie tylko umiejętności analizy danych, planowania i konsekwentnej realizacji planu rozwiązania. Stanowią też okazję do poszukiwania własnych sposobów rozwiązania, przedstawiania własnego rozumowania w sposób zrozumiały dla innych uczniów i nauczyciela, a także śledzenia toku rozumowania innych osób.

Ze słabych wyników tego zadania można wnioskować także, że uczniowie mogą mieć kłopoty z zadaniami, w których część informacji podana jest w treści zadania, a część w innej formie (na rysunku, na diagramie, w tabelce). Warto, by tak sformułowane zadania były częstszym materiałem do pracy na lekcjach.

Rozumowanie i tworzenie strategii. Podsumowanie

W zadaniach sprawdzających umiejętność wykorzystania i tworzenia informacji uczniowie mogli zdobyć maksymalnie 7 punktów. Wykres na następnej stronie pokazuje rozkład uzyskanych punktów. Rozkład zdobytych punktów bardzo wyraźnie pokazuje, jak trudna dla uczniów klasy V szkoły podstawowej jest umiejętność rozumowania i tworzenia strategii. Aż 37% uczestników badania nie otrzymało ani jednego punktu za rozwiązanie zadań z tej kategorii. Jeden punkt na 7 możliwych do zdobycia uzyskało ponad 31% uczniów. Tak więc prawie 70% piątoklasistów uczestniczących w badaniu nie potrafi ani zaplanować i wykonać kolejnych kroków w rozwiązaniu wieloetapowego zadania, ani przyswoić kilku informacji, które należy jednoczenie wziąć pod uwagę, a następnie wyciągnąć z nich wnioski.



13,5% uczniów zdobyło 2 punkty – stanowi to już niezły punkt wyjścia do dalszej pracy. Pozostałe 18,3% uczniów uzyskało za zadania z tej kategorii 3 i więcej punktów. O tych uczniach można powiedzieć, że radzą sobie dość dobrze lub bardzo dobrze z problemami wymagającymi prostego rozumowania, wyciągania wniosków lub opracowania strategii rozwiązania.

Wnioski i rekomendacje

Zdolność logicznego rozumowania, opracowywania skutecznych strategii postępowania jest umiejętnością, wbrew pozorom, nieobcą nawet uczniom najsłabszym. Wystarczy zaobserwować ich zachowania swobodne – nie na lekcji matematyki, ale podczas wykonywania innych czynności, na przykład organizowania jakiegoś przedsięwzięcia czy choćby wtedy, gdy uczestniczą w jakiejś grze. Dlaczego więc na gruncie matematyki tak słabo sobie radzą?

Może przyczyną jest to, że na lekcjach matematyki rzadko spotykają się z zadaniami kilkuetapowymi, w których naprawdę sami mogą ułożyć drogę i zaproponować sposób rozwiązania? Być może dotychczas na matematyce stykali się tylko z krótkimi zadaniami, wymagającymi dość mechanicznego wykonania obliczeń? Lub gdy pojawiało się zadanie dłuższe, kilkukrokowe, uczniowie nie mieli okazji samodzielnie wymyślić drogi jego rozwiązania, bo wcześniej ktoś (nauczyciel, kolega pod tablicą) już im je podał? Jeśli tak było, to trudno im wyjść poza dotychczasowe przyzwyczajenia.

Aby radzić sobie z takimi złożonymi zadaniami, uczeń musi posiąść umiejętność analizy złożonego problemu i opracowania strategii jego rozwiązania, czyli zaplanowania kolejnych etapów rozwiązania. Aby z kolei poradzić sobie z analizą złożonego problemu, stanowiącego punkt wyjścia do tego rodzaju zadań, uczeń musi nauczyć się przyswajać, łączyć i wyciągać wnioski z wielu informacji, często podanych w różnej formie.

Stąd wniosek, że na lekcjach matematyki należy:

- przedstawiać uczniom teksty (niekoniecznie w formie typowych zadań), zawierające wiele powiązanych ze sobą informacji, które trzeba jednocześnie wziąć pod uwagę, aby poprawnie odpowiedzieć na postawione pytania
- zadbać o odpowiednią wizualizację – rysunek czy schemat – i skłaniać uczniów do samodzielnego tworzenia takich wizualizacji, czyli takiego zapisu odczytanych informacji (danych liczbowych i związków między nimi), który dla konkretnego ucznia będzie wygodnym punktem wyjścia do wyciągania wniosków i opracowania sposobu rozwiązania
- rozwiązywać krótkie jednoetapowe zadania i łączyć je tak, aby tworzyć z nich dłuższe ciągi rozumowań
- ćwiczyć proste dwu-, trzyetapowe rozumowania i bardzo dokładnie je analizować

- rozwiązywać z uczniami kilkuetapowe zadania, w których każdy kolejny etap jest bardzo prosty, a trudność polega głównie na opracowaniu strategii, czyli określeniu, jakie kroki i w jakiej kolejności należy wykonać
- proponować uczniom samodzielne stawianie lub odszukiwanie problemów, których rozwiązanie wymaga opracowania strategii lub pewnego procesu rozumowania
- wykorzystać każdą nadarzającą się sytuację do ćwiczenia umiejętności argumentacji i wnioskowania – np. w przypadku pojawienia się błędnej odpowiedzi lub błędnego zapisu na tablicy.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE INSTYTUT BADAŃ EDUKACYJNYCH

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

imię i nazwisko ucznia

klasa

nr w dzienniku

DUMa

Diagnoza umiejętnosci matematycznych uczniów szkół podstawowych

Czas rozwiązywania zadań – 45 minut.

Zestaw M1

Instrukcja dla ucznia

- Sprawdź, czy zestaw zawiera 15 zadań. Ewentualny brak zgłoś nauczycielowi.
- Rozwiązania zadań zapisuj długopisem albo piórem.
- Nie używaj korektora.
- Nie używaj kalkulatora.
- W zadaniach 1 – 12 podane są odpowiedzi do wyboru.
  W każdym z tych zadań zamaluj literę przy poprawnej odpowiedzi, na przykład:

A 12 B 18 C 36 D 48 E 64

lub

Jedno zdanie	P	F
Drugie zdanie	P	F

lub Jedno zdanie A 2 B 4

Drugie zdanie C 36 D 48

- Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, na przykład:

A 12 B 18 C 36 D 48 E 64

- Kratki obok zadań 1 – 12 mogą służyć Ci jako brudnopis.
- W zadaniach 13, 14 i 15 nie masz podanych odpowiedzi do wyboru. Rozwiązania tych zadań zapisz starannie i czytelnie na kratkach obok lub poniżej zadania.
- Pracuj samodzielnie. Twoi sąsiedzi mają inne zestawy zadań.

Powodzenia!

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 1

BRUDNOPIS

Na tablicy zapisano cztery liczby: $\frac{10}{7}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{7}{3}$.

Ile spośród tych liczb jest większych niż 2, ale mniejszych niż 3?

A Żadna.
B Jedna.
C Dwie.
D Trzy.
E Wszystkie.

Zadanie 2

Które stwierdzenie **nie jest** prawdziwe?

A $0{,}21 = 0{,}210$
B $2{,}35 \cdot 10 = 2{,}350$
C $5{,}04 + 0{,}2 < 5{,}02 + 0{,}4$
D $0{,}1101 > 0{,}1011$

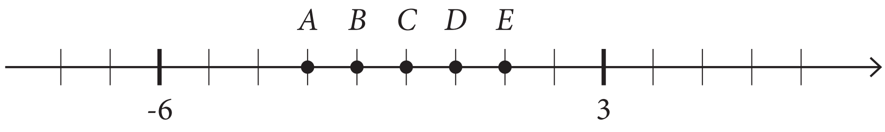
Zadanie 3

Na widowni kina w każdym rzędzie jest po 15 miejsc.
Uczniowie szkoły w Kocich Łapkach zajęli wszystkie miejsca od początku rzędu XI do końca rzędu XIV.
Ile miejsc zajęli ci uczniowie?

A 90
B 75
C 60
D 45

Zadanie 4

Na rysunku przedstawiono oś liczbową, na której zaznaczono pięć punktów.



Oceń prawdziwość podanych zdań.
Wybierz P – jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Punkt B odpowiada liczbie –2.	P	F
Spośród zaznaczonych punktów tylko trzy odpowiadają liczbom ujemnym.	P	F

Informacja do zadań 5 i 6

W zawodach w budowaniu najwyższego domku z kart wzięło udział 12 drużyn. Każda z nich budowała swój domek przez 10 minut.

- Pierwsza drużyna rozpoczęła pracę o godzinie 10:00.
- Druga rozpoczęła po dwóch minutach, czyli o 10:02.
- Trzecia drużyna po kolejnych dwóch minutach, i tak dalej…

Zadanie 5

Ile drużyn było w trakcie pracy o godzinie 10:11?

A Trzy. B Cztery. C Pięć. D Sześć.

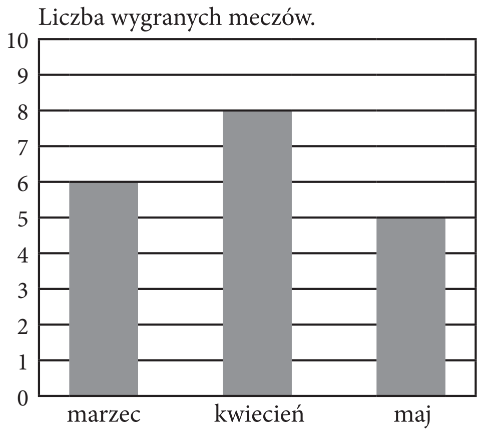
Zadanie 6

Ostatnia drużyna zakończyła pracę o godzinie

A 10:22 B 10:24 C 10:32 D 10:34

Zadanie 7

Drużyna Orlików brała udział w wiosennym turnieju w siatkówce. W każdym miesiącu drużyna rozgrywała 10 meczów. Na diagramie przedstawiono liczby meczów wygranych w poszczególnych miesiącach. Pozostałe mecze drużyna Orlików przegrała.



Zgodnie z zasadami turnieju za każdy wygrany mecz drużyna otrzymuje 3 punkty, a za każdy przegrany 1 punkt.

Oceń prawdziwość podanych zdań.
Zaznacz P – jeśli zdanie jest prawdziwe,
lub F – jeśli jest fałszywe.

W ciągu tych trzech miesięcy drużyna Orlików wygrała 20 meczów.	P	F
Liczba punktów zdobytych w kwietniu przez drużynę Orlików jest równa 24.	P	F

BRUDNOPIS

Zadanie 8

W tabeli poniżej podano długości dróg z Łapek Wielkich i z Pazur do Konina, Baranowa, Wołowa i Turowa.

droga	Konin	Baranów	Wołów	Turów
Łapki Wielkie	24 km	25 km	19 km	36 km
Pazury	42 km	38 km	52 km	29 km

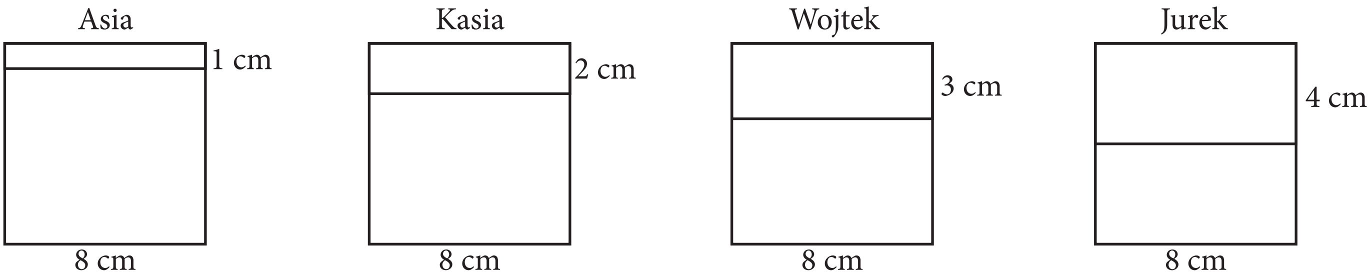
Ania chce przejechać najkrótszą drogą z Łapek Wielkich do Pazur. Ma do wyboru cztery trasy: przez Konin, przez Baranów, przez Wołów i przez Turów.

Oceń prawdziwość podanych zdań.
Zaznacz P – jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Droga z Łapek Wielkich do Pazur przez Turów ma długość 65 km.	P	F
Najkrótsza droga z Łapek Wielkich do Pazur prowadzi przez Wołów.	P	F

Zadanie 9

Asia, Kasia, Wojtek i Jurek rozcięli takie same kwadratowe kartki na dwie prostokątne części. Każde dziecko rozcięło swoją kartkę w inny sposób, tak jak przedstawiono na rysunkach.



BRUDNOPIS

Każda z czterech osób obliczyła obwody obu otrzymanych części i dodała liczby do siebie.
Wskaż poprawną informację o uzyskanych wynikach.

A Każda z tych czterech osób otrzymała ten sam wynik.

B Największy wynik otrzymał Jurek.

C Wynik Kasi był mniejszy niż wynik Wojtka.

D Najmniejszy wynik otrzymała Asia.

Zadanie 10

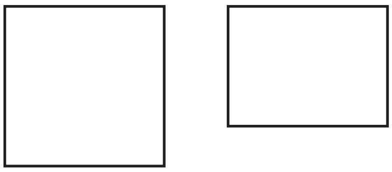
Pan Zaleski ma trzy pieski: Azora, Reksa i Sabę. Azor jest cięższy od Reksa o 6 kg, ale jest lżejszy od Saby o 2 kg. Dokończ podane niżej zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A lub B oraz C lub D.

Reks jest od Saby   A lżejszy.   B cięższy.

Różnica wag Saby i Reksa jest równa   C 8 kg   D 4 kg

Zadanie 11

Siatka prostopadłościanu składa się z kwadratów o boku 4 cm i prostokątów o wymiarach 4 cm × 3 cm, takich, jak na rysunku poniżej.



Podaj poprawne odpowiedzi na pytania.
Wybierz odpowiedzi spośród A lub B oraz C lub D.

Ile ścian tego prostopadłościanu ma kształt kwadratu?

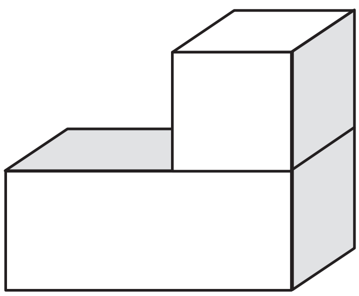
A 2   B 4

Jaka jest objętość tego prostopadłościanu?

C 36 cm^3 D 48 cm^3

Zadanie 12

Bryłę sklejono z prostopadłościanu o wymiarach 5 cm × 5 cm × 12 cm i sześcianu o krawędzi 5 cm, tak, jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Pole powierzchni tej bryły jest równe

A 350 cm^2 B 390 cm^2 C 415 cm^2

D 425 cm^2 E 440 cm^2

BRUDNOPIS

Rozwiązania zadań 13, 14 i 15 zapisz starannie i czytelnie na kratkach.

Zadanie 13

Basia kupiła 8 ramek na zdjęcia.
Zapłaciła za nie równo 50 zł.

Ile małych i ile dużych ramek kupiła?

Cennik
mała ramka – 6 zł
duża ramka – 8 zł
mały album – 9 zł
duży album – 14 zł

ROZWIĄZANIE:

Liczba małych ramek ....

Liczba dużych ramek ....

Zadanie 14

Trener tenisa zapisał w kalendarzu imiona wszystkich dzieci, które uczestniczyły w indywidualnych treningach w kolejnych dniach w tygodniu przed zawodami. Za każdą lekcję trener pobiera taką samą kwotę. W tym tygodniu za wszystkie lekcje udzielone dzieciom otrzymał 600 zł.

Ile zapłacili rodzice Ewy za wszystkie jej lekcje tenisa w tym tygodniu?

	15:00 – 16:00	16:00 – 17:00	17:00 – 18:00
12 maja poniedziałek	Ewa		
13 maja wtorek	Szymon	Kasia	Wojtek
14 maja środa	Ewa	Andrzej	
15 maja czwartek	Borys		
16 maja piątek	Szymon	Kasia	Wojtek
17 maja sobota	Ewa	Andrzej	
18 maja niedziela			

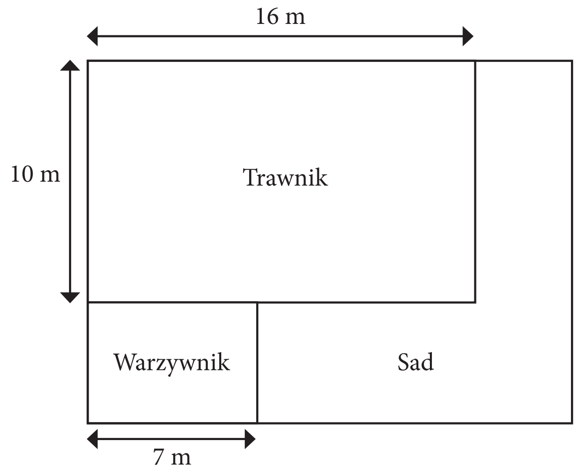
ROZWIĄZANIE:

Odpowiedź: ....

Zadanie 15

Prostokątna działka o wymiarach 20 m × 15 m podzielona jest na trzy części tak, jak na rysunku obok (trawnik i warzywnik są prostokątami).

Jaką część działki zajmuje sad?
Odpowiedź podaj w postaci ułamka.



ROZWIĄZANIE:

Odpowiedź: ....

....

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE INSTYTUT BADAŃ EDUKACYJNYCH

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

imię i nazwisko ucznia

klasa

nr w dzienniku

DUMa

Diagnoza umiejętnosci matematycznych uczniów szkół podstawowych

Czas rozwiązywania zadań – 45 minut.

Zestaw M2

Instrukcja dla ucznia

- Sprawdź, czy zestaw zawiera 15 zadań. Ewentualny brak zgłoś nauczycielowi.
- Rozwiązania zadań zapisuj długopisem albo piórem.
- Nie używaj korektora.
- Nie używaj kalkulatora.
- W zadaniach 1 – 12 podane są odpowiedzi do wyboru.
  W każdym z tych zadań zamaluj literę przy poprawnej odpowiedzi, na przykład:

A 12 ■ 18 C 36 D 48 E 64

lub

Jedno zdanie	P	■
Drugie zdanie	■	F

lub

Jedno zdanie ■ 2 B 4

Drugie zdanie C 36 ■ 48

- Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, na przykład:

A 12 ■ 18 C 36 ■ 48 E 64

- Kratki obok zadań 1 – 12 mogą służyć Ci jako brudnopis.
- W zadaniach 13, 14 i 15 nie masz podanych odpowiedzi do wyboru. Rozwiązania tych zadań zapisz starannie i czytelnie na kratkach obok lub poniżej zadania.
- Pracuj samodzielnie. Twoi sąsiedzi mają inne zestawy zadań.

Powodzenia!

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 1

Na tablicy zapisano cztery liczby: $\frac{10}{7}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{7}{3}$.

Ile spośród tych liczb jest większych niż 1, ale mniejszych niż 2?

A Żadna.
B Jedna.
C Dwie.
D Trzy.
E Wszystkie.

BRUDNOPIS

Zadanie 2

Które stwierdzenie **nie jest** prawdziwe?

A $0{,}21 \cdot 10 = 0{,}210$
B $2{,}35 = 2{,}350$
C $5{,}02 + 0{,}4 > 5{,}04 + 0{,}2$
D $0{,}1011 < 0{,}1101$

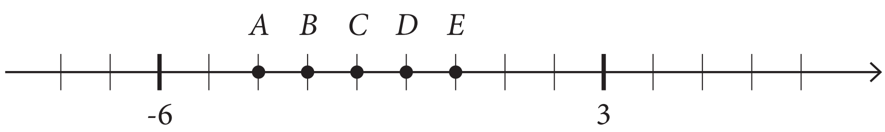
Zadanie 3

Na widowni kina w każdym rzędzie jest po 15 miejsc. Uczniowie szkoły w Kocich Łapkach zajęli wszystkie miejsca od początku rzędu XII do końca rzędu XIV. Ile miejsc zajęli ci uczniowie?

A 45
B 60
C 75
D 90

Zadanie 4

Na rysunku przedstawiono oś liczbową, na której zaznaczono pięć punktów.



Oceń prawdziwość podanych zdań.
Wybierz P – jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Punkt B odpowiada liczbie –2.	P	F
Spośród zaznaczonych punktów tylko trzy odpowiadają liczbom ujemnym.	P	F

Informacja do zadań 5 i 6

W zawodach w budowaniu najwyższego domku z kart wzięło udział 13 drużyn. Każda z nich budowała swój domek przez 10 minut.

- Pierwsza drużyna rozpoczęła pracę o godzinie 10:00.
- Druga rozpoczęła po dwóch minutach, czyli o 10:02.
- Trzecia drużyna po kolejnych dwóch minutach, i tak dalej…

BRUDNOPIS

Zadanie 5

Ile drużyn było w trakcie pracy o godzinie 10:13?

A Cztery. B Pięć. C Sześć. D Siedem.

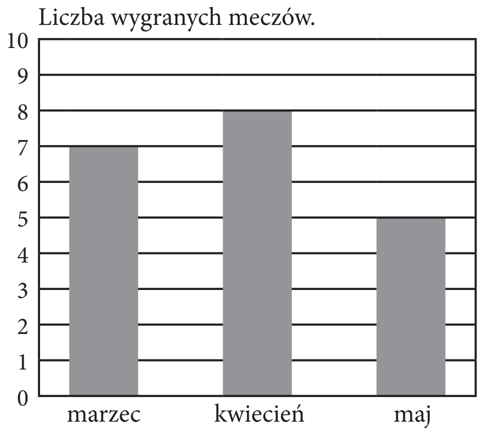
Zadanie 6

Ostatnia drużyna zakończyła pracę o godzinie

A 10:24 B 10:26 C 10:34 D 10:36

Zadanie 7

Drużyna Orlików brała udział w wiosennym turnieju w piłce siatkowej. W każdym miesiącu drużyna rozgrywała 10 meczów. Na diagramie przedstawiono liczby meczów wygranych w poszczególnych miesiącach. Pozostałe mecze drużyna Orlików przegrała.



Zgodnie z zasadami turnieju za każdy wygrany mecz drużyna otrzymuje 3 punkty, a za każdy przegrany 1 punkt.

Oceń prawdziwość podanych zdań.
Zaznacz P – jeśli zdanie jest prawdziwe,
lub F – jeśli jest fałszywe.

W ciągu tych trzech miesięcy drużyna Orlików wygrała 20 meczów.	P	F
Liczba punktów zdobytych w marcu przez drużynę Orlików jest równa 21.	P	F

Zadanie 8

W tabeli poniżej podano długości dróg z Łapek Wielkich i z Pazur do Konina, Baranowa, Wołowa i Turowa.

droga	Konin	Baranów	Wołów	Turów
Łapki Wielkie	24 km	25 km	19 km	38 km
Pazury	42 km	38 km	52 km	29 km

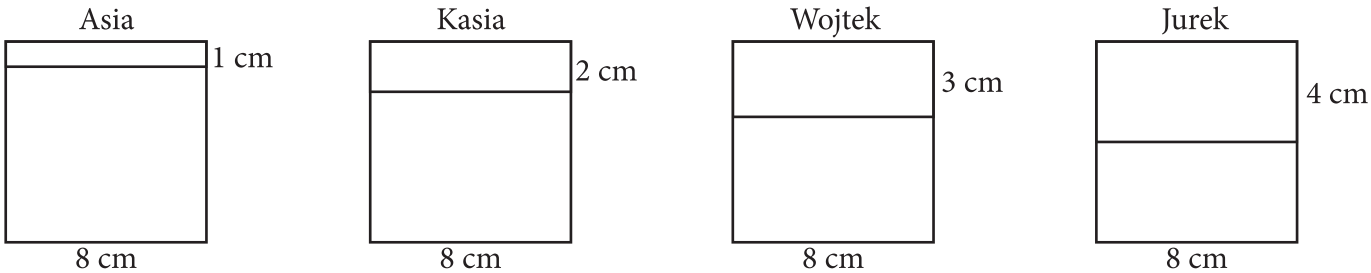
Ania chce przejechać najkrótszą drogą z Łapek Wielkich do Pazur. Ma do wyboru cztery trasy: przez Konin, przez Baranów, przez Wołów i przez Turów.

Oceń prawdziwość podanych zdań.
Zaznacz P – jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Droga z Łapek Wielkich do Pazur przez Turów ma długość 65 km.	P	F
Najkrótsza droga z Łapek Wielkich do Pazur prowadzi przez Wołów.	P	F

Zadanie 9

Asia, Kasia, Wojtek i Jurek rozcięli takie same kwadratowe kartki na dwie prostokątne części.
Każde dziecko rozcięło swoją kartkę w inny sposób, tak jak przedstawiono na rysunkach.



BRUDNOPIS

Każda z czterech osób obliczyła obwody obu otrzymanych części i dodała liczby do siebie.
Wskaż poprawną informację o uzyskanych wynikach.

A. Największy wynik otrzymał Jurek.
B. Wynik Kasi był mniejszy niż wynik Wojtka.
C. Najmniejszy wynik otrzymała Asia.
D. Każda z tych czterech osób otrzymała ten sam wynik.

Zadanie 10

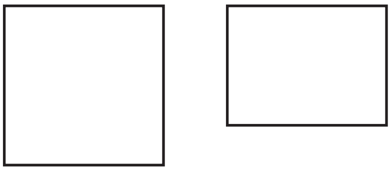
Pan Zaleski ma trzy pieski: Azora, Reksa i Sabę. Azor jest lżejszy od Reksa o 6 kg, ale jest cięższy od Saby o 2 kg. Dokończ podane niżej zdania. Wybierz odpowiedzi spośród A lub B oraz C lub D.

Reks jest od Saby $\boxed{\text{A}}$ lżejszy. $\boxed{\text{B}}$ cięższy.

Różnica wag Reksa i Saby jest równa $\boxed{\text{C}}$ 8 kg $\boxed{\text{D}}$ 4 kg

Zadanie 11

Siatka prostopadłościanu składa się z kwadratów o boku 5 cm i prostokątów o wymiarach 5 cm × 3 cm, takich, jak na rysunku poniżej.



Podaj poprawne odpowiedzi na pytania.
Wybierz odpowiedzi spośród A lub B oraz C lub D.

Ile ścian tego prostopadłościanu ma kształt kwadratu?

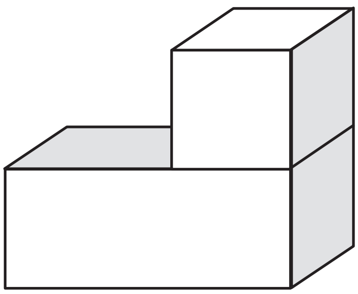
$\boxed{\text{A}}$ 4 $\boxed{\text{B}}$ 2

Jaka jest objętość tego prostopadłościanu?

$\boxed{\text{C}}$ 75 cm^3 $\boxed{\text{D}}$ 45 cm^3

Zadanie 12

Bryłę sklejono z prostopadłościanu o wymiarach 5 cm × 5 cm × 12 cm i sześcianu o krawędzi 5 cm, tak, jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Pole powierzchni tej bryły jest równe

$\boxed{\text{A}}$ 440 cm^2 $\boxed{\text{B}}$ 425 cm^2 $\boxed{\text{C}}$ 415 cm^2

$\boxed{\text{D}}$ 390 cm^2 $\boxed{\text{E}}$ 350 cm^2

BRUDNOPIS

Rozwiązania zadań 13, 14 i 15 zapisz starannie i czytelnie na kratkach.

Zadanie 13

Basia kupiła 9 ramek na zdjęcia.
Zapłaciła za nie równo 60 zł.

Ile małych i ile dużych ramek kupiła?

Cennik
mała ramka – 6 zł
duża ramka – 8 zł
mały album – 11 zł
duży album – 16 zł

ROZWIĄZANIE:

Liczba małych ramek ....

Liczba dużych ramek ....

Zadanie 14

Trener tenisa zapisał w kalendarzu imiona wszystkich dzieci, które uczestniczyły w indywidualnych treningach w kolejnych dniach w tygodniu przed zawodami. Za każdą lekcję trener pobiera taką samą kwotę. W tym tygodniu za wszystkie lekcje udzielone dzieciom otrzymał 600 zł.

Ile zapłacili rodzice Andrzeja za wszystkie jego lekcje tenisa w tym tygodniu?

	15:00 – 16:00	16:00 – 17:00	17:00 – 18:00
12 maja poniedziałek	Borys	Andrzej	
13 maja wtorek		Kasia	Wojtek
14 maja środa		Andrzej	
15 maja czwartek	Borys	Andrzej	Ewa
16 maja piątek	Mateusz	Kasia	Wojtek
17 maja sobota		Andrzej	
18 maja niedziela			

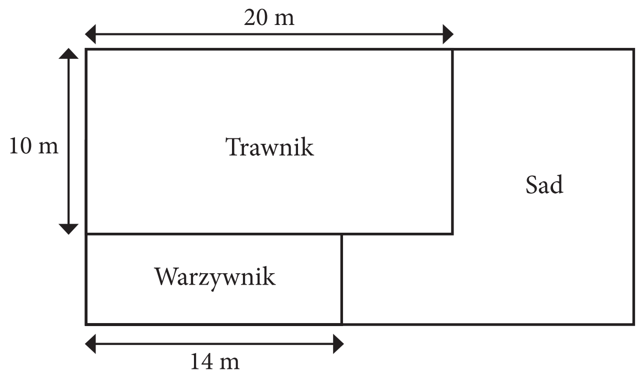
ROZWIĄZANIE:

Odpowiedź: ....

Zadanie 15

Prostokątna działka o wymiarach 30 m × 15 m podzielona jest na trzy części tak, jak na rysunku obok (trawnik i warzywnik są prostokątami).

Jaką część działki zajmuje sad?
Odpowiedź podaj w postaci ułamka.



ROZWIĄZANIE:

Odpowiedź: ....

....

Instytut Badań Edukacyjnych

Głównym zadaniem Instytutu jest prowadzenie badań, analiz i prac przydatnych w rozwoju polityki i praktyki edukacyjnej.

Instytut zatrudnia ponad 150 badaczy zajmujących się edukacją – pedagogów, socjologów, psychologów, ekonomistów, politologów i przedstawicieli innych dyscyplin naukowych – wybitnych specjalistów w swoich dziedzinach, o różnorakich doświadczeniach zawodowych, które obejmują, oprócz badań naukowych, także pracę dydaktyczną, doświadczenie w administracji publicznej czy działalność w organizacjach pozarządowych.

Instytut w Polsce uczestniczy w realizacji międzynarodowych projektów badawczych w tym *PIAAC, PISA, TALIS, ESLC, SHARE, TIMSS* i *PIRLS* oraz projektów systemowych współfinansowanych przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

Instytut Badań Edukacyjnych

ul. Górczewska 8, 01–180 Warszawa | tel. +48 22 241 71 00 | ibe@ibe.edu.pl | **www.ibe.edu.pl**
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.