



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE  *entuzjaści
edukacji*

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Małgorzata Zambrowska

Marcin Karpiński

Bartosz Kondrątek

Kompetencje matematyczne trzecioklasistów

Warszawa, listopad 2015

Autorzy:

Małgorzata Zambrowska

Marcin Karpiński

Bartosz Kondratek

Zespół realizujący badanie:

Badanie zostało przygotowane przez zespół Pracowni Matematyki IBE w składzie:

Monika Czajkowska, Marzenna Grochowalska, Jerzy Janowicz, Marcin Karpiński, Jacek Lech,

Margaryta Orzechowska, Dorota Sosulska, Agnieszka Sułowska, Małgorzata Zambrowska

Recenzenci zewnętrzni:

prof. dr hab. Ewa Swoboda

© Copyright by: Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa, listopad 2015

Wzór cytowania:

Zambrowska M., Karpiński M. i Kondratek B. (2015). *Kompetencje matematyczne trzecioklasistów*.
Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

Wydawca:

Instytut Badań Edukacyjnych

ul. Górczewska 8

01-180 Warszawa

tel. (22) 241 71 00; www.ibe.edu.pl

Publikacja opracowana w ramach projektu systemowego: *Badanie jakości i efektywności edukacji oraz instytucjonalizacja zaplecza badawczego*, współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, realizowanego przez Instytut Badań Edukacyjnych.

Egzemplarz bezpłatny

Spis treści

Spis treści	3
1. Badanie <i>Kompetencje trzecioklasistów 2015</i> – wprowadzenie	4
2. Ogólne informacje o badaniu i wyniki	6
2.1. Założenia badania	6
2.2. Konstrukcja arkuszy	7
2.3. Ogólne wyniki badania	7
3. Wyniki zadań	9
3.1. Obszar <i>sprawność rachunkowa</i>	10
3.1.1. Opis obszaru	10
3.1.2. Analiza wykonania zadań z obszaru <i>sprawność rachunkowa</i>	11
3.1.3. Podsumowanie wyników obszaru <i>sprawność rachunkowa</i>	15
3.2. Obszar <i>rozwiązywanie zadań tekstowych</i>	16
3.2.1. Opis obszaru <i>rozwiązywanie zadań tekstowych</i>	16
3.2.2. Podobszar <i>rozważanie możliwości</i>	17
3.2.3. Podobszar <i>dostrzeganie zależności</i>	21
3.2.4. Podsumowanie wyników obszaru <i>rozwiązywanie zadań tekstowych</i>	24
3.3. Obszar <i>wyobraźnia geometryczna</i>	26
3.3.1. Opis obszaru <i>wyobraźnia geometryczna</i>	26
3.3.2. Podobszar <i>intuicje geometryczne</i>	27
3.3.3. Podobszar <i>obliczenia w geometrii</i>	32
3.3.4. Podsumowanie wyników obszaru <i>wyobraźnia geometryczna</i>	35
4. Podsumowanie	37

1. Badanie *Kompetencje trzecioklasistów 2015* – wprowadzenie

Ogólnopolskie badanie *Kompetencje trzecioklasistów (K3)* odbyło się w maju 2015. Wzięto w nim udział około 200 000 uczniów z ponad 7900 szkół podstawowych.

Badanie K3 to przede wszystkim diagnoza poświęcona ważnym umiejętnościom w dwóch dziedzinach: matematyka i język polski. Nie jest to zatem forma egzaminu zewnętrznego. Oznacza to, że celem badania w części matematycznej nie było podsumowanie wszystkich umiejętności opisanych w podstawie programowej. Takie zadanie nie jest wykonalne za pomocą krótkiego zestawu zadań. Wybraliśmy te umiejętności, które mają duży wpływ na późniejsze osiągnięcia uczniów i ich matematyczny rozwój, a których kształtowanie powinno szczególnie silnie zacząć się w edukacji wczesnoszkolnej. Zadania zaś konstruowane były tak, żeby ważne wnioski dla nauczania matematyki w klasach 1-3 można było wyciągać nie tylko ze wskaźników pokazujących poziom rozwiązalności danego zadania. Równie ważna, a może nawet ważniejsza dla przeprowadzonej diagnozy jest analiza rodzajów błędów popełnianych przez uczniów i analiza metod, jakimi uczniowie dochodzili do poprawnych rozwiązań. Sposób organizacji badania, narzędzia służące do oceny pracy ucznia, kolejne raporty wysyłane do szkół, a także niniejsze opracowanie, mają pomóc nauczycielom w rozpoznawaniu przyczyn popełniania przez uczniów niektórych błędów, a tym samym pomóc w ewentualnej zmianie metod pracy nauczycieli podczas zajęć edukacji matematycznej.

Samo badanie K3 nie jest oczywiście oderwane od obowiązującej podstawy programowej. Wszystkie wybrane do badania umiejętności uczniów są opisane w podstawie programowej. Nie chodzi przy tym wyłącznie o treści nauczania. Szczególnie ważne są zapisane tam takie cele nauczania, jak:

- cele kształcenia ogólnego w szkole podstawowej (np. zdobycie przez ucznia umiejętności wykorzystania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów);
- umiejętność rozumowania (umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych).

Przy wyborze zadań do arkusza użytego w badaniu kierowano się wnioskami wyprowadzonymi z realizowanych przez Instytut Badań Edukacyjnych w latach 2012 – 2014 badań trzecioklasistów, piątoklasistów i szóstoklasistów.

W kilku wcześniejszych badaniach zaobserwowano na przykład luki w umiejętnościach uczniów związanych z obszarem *wyobraźnia geometryczna* uniemożliwiające im w starszych klasach w pełni wykorzystać ich potencjał matematyczny. Z badań tych wynikało, że luki te są skutkiem wad nauczania matematyki na najwcześniejszym etapie. Dlatego w arkuszu użytym w badaniu K3 znalazło się też sporo zadań mających pomóc nauczycielom zanalizować ich sposób nauczania w tym obszarze.

Wyniki z dotychczasowych badań wskazują także, że uczniowie zazwyczaj dobrze radzą sobie z zadaniami, do rozwiązania których mogą zastosować poznane w szkole, gotowe schematy. W zadaniach wymagających samodzielnego rozumowania, zastosowania poznanych narzędzi w rozwiązaniu nowego problemu, uczniowie często się gubią. Aby pogłębić wiedzę na temat strategii rozwiązywania przez uczniów tego typu problemów wiele zadań użytych w badaniu K3 stwarzało dzieciom okazję do poszukiwania, odkrywania i tworzenia własnych strategii dochodzenia do rozwiązania zadania.

Po zakończeniu badania każda ze szkół otrzymała raporty, w których przedstawiono dokładne informacje o osiągnięciach poszczególnych uczniów, oddziałów oraz całej szkoły. Wyniki oddziałów w poszczególnych obszarach badanych umiejętności przedstawiono w tych raportach na tle wyników wszystkich trzecioklasistów uczestniczących w badaniu K3, województwa, w którym mieściła się badana szkoła oraz uczniów ze szkół zlokalizowanych w podobnych, ze względu na liczbę mieszkańców, miejscowościach. Z punktu widzenia nauczyciela, najbardziej wartościowe są wyniki poszczególnych uczniów. Raport klasowy i dokładna analiza uczniowskich rozwiązań pozwala wychowawcy klasy trzeciej ocenić poziom umiejętności matematycznych ucznia, jego możliwości i ewentualne braki. Wiedza wynikająca z wyniku badania w szkole jest także ważna dla nauczyciela matematyki, który przejął pracę z tymi uczniami w czwartej klasie. Zachęcamy, aby nauczyciel klasy III i nauczyciel matematyki z klasy IV wspólnie przeanalizowali prace uczniów, koncentrując się przede wszystkim na sposobie, w jaki uczniowie rozwiązywali zadania oraz na tym, jakie błędy popełniali. Pozwoli to poznać sposoby rozumowania dzieci i dzięki temu trafniej dostosować metody pracy w klasie czwartej do możliwości i potrzeb uczniów. Wyniki K3 mogą być także dobrą okazją do wymiany spostrzeżeń i doświadczeń nauczycieli, zarówno klas I-III, jak i IV-VI, w celu doskonalenia kształcenia matematycznego na obu etapach edukacyjnych.

W raportach wysłanych do szkół tuż po badaniu, oprócz podsumowania wyników, umieszczono także rekomendacje, dotyczące sugerowanych nauczycielom metod pracy z uczniami. Rekomendacje te dostosowano do uzyskanych przez uczniów wyników. W założeniu, mają one posłużyć nauczycielom I etapu kształcenia do planowania pracy z kolejnym zespołem uczniów rozpoczynających naukę w szkole. Analiza wyników badania, rozmowy z nauczycielami matematyki przejmującymi uczniów w klasie IV oraz wspomniane wyżej rekomendacje, dają szansę na wzbogacenie warsztatu pracy nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej.

Przestrzegamy przed bezpośrednim porównywaniem wyników badania różnych oddziałów, a tym bardziej szkół. Wyniki te zależą bowiem zarówno od pracy nauczycieli, jak i wielu innych czynników od nich niezależnych, np. indywidualnych zdolności dzieci, umiejętności, z którymi rozpoczynają one naukę w szkole czy wykształcenia rodziców. Wpływ na ostateczny wynik badania mogły mieć także warunki i atmosfera w jakich dzieci przystąpiły do rozwiązywania zadań K3.

Nieuzasadnione jest także bezpośrednie porównywanie wyników tegorocznego badania z wynikami podobnych badań z poprzednich lat prowadzonych przez IBE lub inne instytucje. Badanie K3 nie zostało zaprojektowane w sposób umożliwiający takie porównania. Każde badanie trzecioklasistów z założenia obejmuje bowiem nieco inne obszary umiejętności matematycznych.

Warto podkreślić, że przeprowadzenie tak dużego przedsięwzięcia nie byłoby możliwe bez zaangażowania nauczycieli i dyrektorów szkół, za co serdecznie dziękujemy.

2. Ogólne informacje o badaniu i wyniki

2.1. Założenia badania

Podstawowym celem badania *Kompetencje trzecioklasistów* jest dostarczenie nauczycielom informacji o poziomie wiadomości i umiejętności posiadanych przez ich uczniów kończących klasę trzecią oraz wskazówek mogących stać się podstawą do refleksji nad metodami nauczania matematyki i sposobami realizacji najważniejszych celów tego nauczania.

Wymagania podstawy programowej z matematyki są nie tylko opisane jako szczegółowe wymagania związane z edukacją matematyczną. Cele nauczania matematyki są opisane w preambule podstawy – to cele kształcenia i najważniejsze umiejętności, które uczeń powinien zdobyć. Jednym z celów kształcenia jest *zdobycie przez uczniów umiejętności wykorzystywania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów*, a wśród umiejętności – *myślenie matematyczne, czyli umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych*. Uczniowie mają nie tylko poznać te podstawowe narzędzia matematyki, opisane w wymaganiach szczegółowych, ale także powinni umieć się nimi rozumnie posługiwać. Aby zdobyć te umiejętności, powinni oni rozwiązywać zarówno typowe zadania, ale też zadania mniej typowe, w których muszą wykazać się umiejętnością rozumowania i dobierania narzędzi matematycznych odpowiednich do rozwiązywanego problemu.

Warto też podkreślić rzecz z pozoru oczywistą: nauczanie matematyki na wszystkich etapach powinno stanowić spójną całość. Z tej oczywistości wynika mniej już oczywisty wniosek: nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej powinni dobrze wiedzieć, jakie ich działania i jakie zaniechania działań mają wpływ na późniejszy rozwój matematyczny ich uczniów. Jakie podstawowe intuicje matematyczne powinny być ukształtowane u trzecioklasisty, by radził on sobie na lekcjach matematyki w klasie czwartej. Nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej (podobnie jak inni nauczyciele) powinien mieć narzędzia do oceny skuteczności przyjętych przez niego metod nauczania. Jednym z takich narzędzi jest właśnie diagnoza K3.

W roku 2015, w ogólnopolskim badaniu *Kompetencje trzecioklasistów*, umiejętności matematyczne uczniów badane były w trzech obszarach:

- sprawność rachunkowa,
- rozwiązywanie zadań tekstowych,
- wyobrażenia geometryczna.

Obszary drugi i trzeci były rozbudowane i zostały podzielone na podobszary.

2.2. Konstrukcja arkuszy

W arkuszach badawczych użyto zadań, które zostały poddane wcześniejszej standaryzacji na reprezentatywnej próbie uczniów klas czwartych. Standaryzacji zadań została przeprowadzona na samym początku roku szkolnego 2014/2015 po to, aby ewentualna różnica między poziomem umiejętności czwartoklasistów rozwiązujących zadania, a poziomem umiejętności trzecioklasistów uczestniczących pod koniec roku szkolnego w badaniu *Kompetencje trzecioklasistów* była jak najmniejsza.

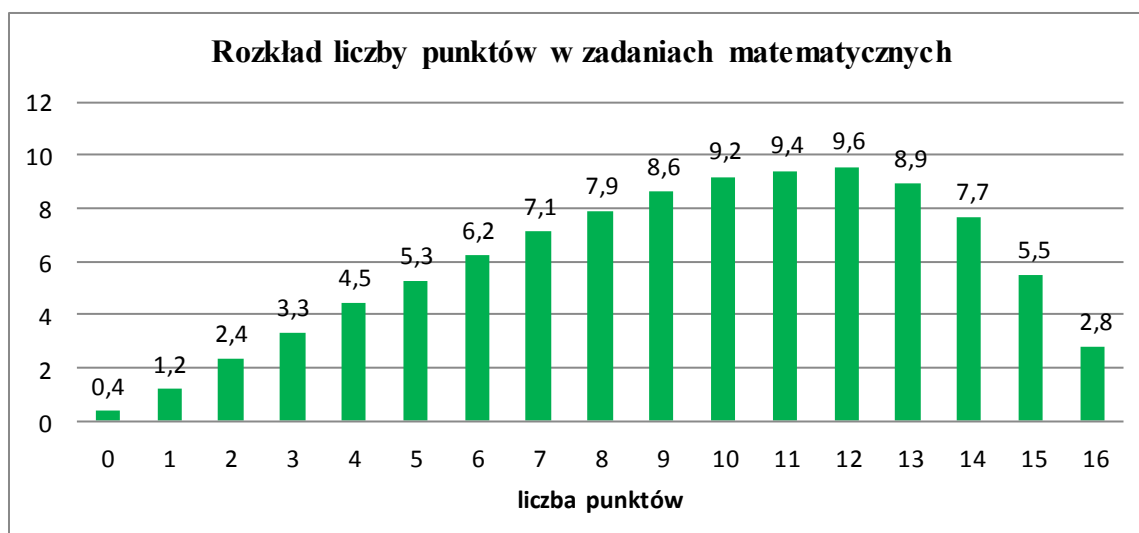
Do badania wybrano zadania, których współczynnik łatwości wynosił w standaryzacji od 0,3 do 0,8. Z zadań tych zbudowano dwa zestawy, M1 i M2. Zakładano, że współczynniki łatwości całych zestawów będą w badaniu głównym wynosić między 0,5 a 0,6.

Oba arkusze zadań, które rozwiązywali uczniowie, miały taką samą strukturę. Różniły się kolejnością odpowiadających sobie zadań lub użytymi w nich wartościami liczbowymi. Wyniki prezentowane w raporcie są połączonymi wynikami z odpowiadających sobie zadań z wersji M1 oraz M2.

2.3. Ogólne wyniki badania

Średni wynik ucznia biorącego udział w badaniu to 9,5 punktu na 16 punktów możliwych do uzyskania. Łatwość arkusza matematycznego wyniosła więc 0,59. Nie odnotowano istotnych statystycznie różnic między średnim wynikiem chłopców i dziewcząt.

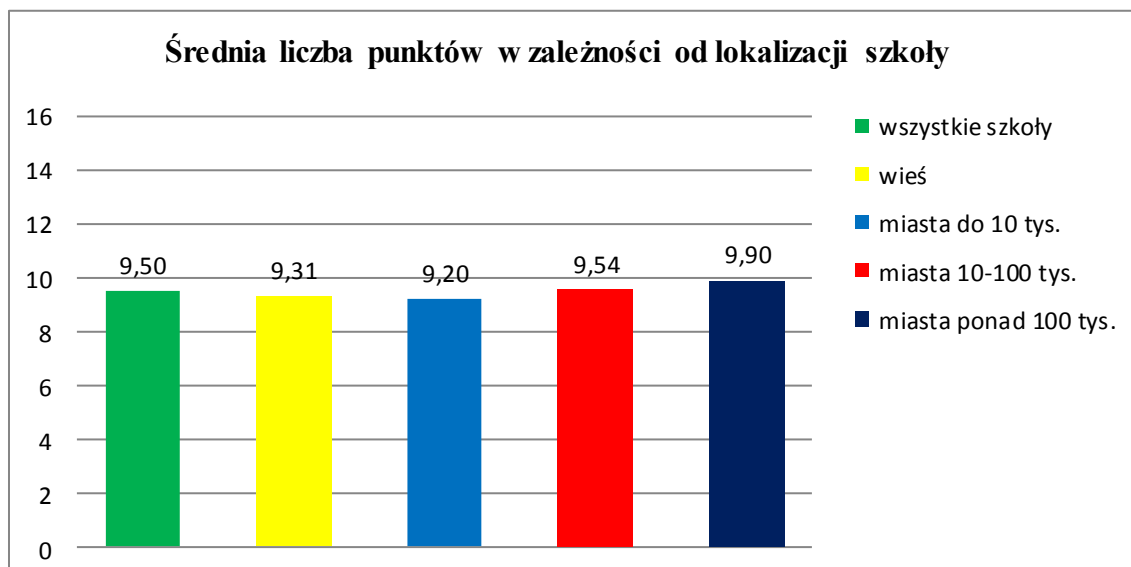
Poniższy wykres przedstawia odsetki uczniów, którzy uzyskali daną liczbę punktów za wszystkie rozwiązane zadania.



Wykres 1. Procentowy rozkład liczby uczniów, którzy zdobyli określoną liczbę punktów.

Ponad 1/3 uczniów uzyskała wynik mieszczący się w przedziale 10-13 punktów, a ponad połowa całej grupy – w przedziale 10-16 punktów. Tylko 0,4% uczniów nie rozwiązało żadnego zadania, a prawie 3% uczniów rozwiązało bezbłędnie wszystkie zadania.

Na wykresie niżej przedstawiono średnie wyniki badania umiejętności matematycznych, z uwzględnieniem lokalizacji szkół.



Wykres 2. Średnie punktowe wyniki badania umiejętności matematycznych z uwzględnieniem lokalizacji szkół.

Najwyższy średni wynik uzyskali uczniowie z dużych miast (9,9 punktu), a najniższy uczniowie ze szkół znajdujących się w miastach do 10 tys. mieszkańców (9,2 punktu). Różnice tych wyników nie są jednak duże. Bardzo podobnie wygląda pod tym względem rozkład wyników dla poszczególnych zadań, obszarów i podobszarów. W związku z tym w dalszej części raportu będziemy przedstawiać wyniki zadań bez rozbicia na lokalizację szkół.

3. Wyniki zadań

W tej części raportu pokażemy wyniki zadań z podziałem na badane obszary i podobszary umiejętności matematycznych. Omówimy zadania, w następującej kolejności:

- zadania z obszaru *sprawność rachunkowa*,
- zadania z obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych*, uwzględniając podział na podobszary *rozważanie możliwości* i *dostrzeganie zależności*,
- zadania z obszaru *wyobraźnia geometryczna*, uwzględniając podział na podobszary *intuicje geometryczne* i *obliczenia w geometrii*.

W raporcie będziemy się posługiwać treścią zadań z arkusza M1.

Prezentując wyniki zadań, będziemy omawiać kolejno:

- Umiejętności ucznia, które sprawdza zadanie.
- Wyniki zadania.
- Typowe sposoby ich rozwiązania przez uczniów, najczęściej pojawiające się błędy i prawdopodobne przyczyny ich popełniania.

W załącznikach do raportu umieszczono zestawienie zadań z arkusza M1, a także opisy zadań, wskazujące obszar umiejętności, rodzaj zadania, zapisy podstawy programowej oraz ogólne zasady przyznawania punktów.

3.1. Obszar *sprawność rachunkowa*

3.1.1. Opis obszaru

Nazwą *sprawność rachunkowa* obejmujemy tu umownie nie tylko prostą umiejętność wykonywania rachunków, ale też umiejętność korzystania z tych rachunków, dobierania własnych strategii obliczeniowych oraz dostrzegania własności liczb i działań.

Sprawność rachunkowa to umiejętność, która pomaga uczniowi w skutecznym rozwiązywaniu zadań i problemów matematycznych. Ćwicząc ją, dzieci tworzą swoje własne strategie obliczeniowe i wykorzystują je w sytuacjach praktycznych, i problemowych. Od tego, jak sprawnie potrafią dodawać i odejmować w pamięci w zakresie 100 czy posługiwać się tabliczką mnożenia, zależy, w wielu przypadkach, poprawne rozwiązanie bardziej złożonych zadań. Sprawne liczenie pozwala uczniowi na większą swobodę podczas doboru strategii rozwiązania zadania i przyspiesza ten proces.

Dobrze opanowana *sprawność rachunkowa* w zakresie czterech działań jest podstawą do budowania kolejnych umiejętności na II etapie edukacyjnym.

W badaniu *K3*, w trzech zadaniach sprawdzających z obszaru *sprawność rachunkowa*, badano poziom opanowania *umiejętności wykorzystywania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów*, uwzględniając niektóre, opisane w obowiązującej podstawie programowej, wymagania szczegółowe na zakończenie klasy III szkoły podstawowej, a w szczególności:

Uczeń:

- *dodaje i odejmuje liczby w zakresie 100,*
- *mnoży i dzieli liczby w zakresie tabliczki mnożenia; podaje z pamięci iloczyn,*
- *rozwiązuje łatwe równania jednodziałaniowe z niewiadomą w postaci okienka,*
- *porównuje dowolne dwie liczby w zakresie 1000.*

3.1.2. Analiza wykonania zadań z obszaru *sprawność rachunkowa*

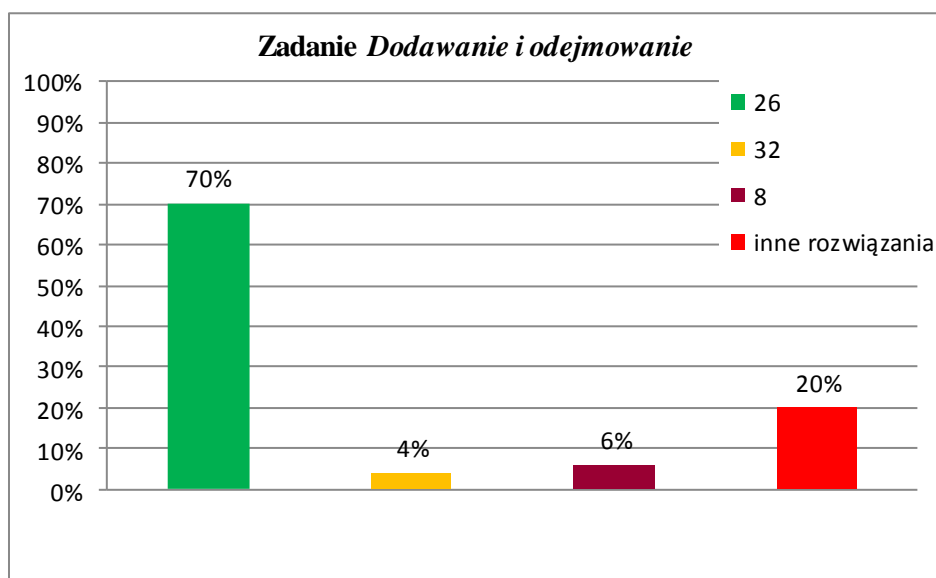
► *Zadanie Dodawanie i odejmowanie*

Oblicz. Wynik wpisz w okienko.

$$32 - 15 + 9 = \square$$

Zadanie sprawdza, czy uczeń umie dodawać i odejmować w pamięci w zakresie 100, z przekroczeniem progu dziesiętkowego. Dodatkowo sprawdza rozumienie związków między działaniami dodawania i odejmowania, przedstawionych w jednym zapisie.

Wykres zamieszczony niżej przedstawia procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Dodawanie i odejmowanie*.



Wykres 3. Zadanie *Dodawanie i odejmowanie*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Poprawną odpowiedź 26 podało 70% badanych trzecioklasistów. Zadanie to okazało się zatem niezbyt trudne. Część uczniów (około 6%) wpisała w okienko liczbę 8. To uczniowie, którzy zamiast obliczenia zapisanego w zadaniu wykonali obliczenie $32 - 15 - 9$. Liczbę 32 wpisało w okienko 4% uczniów – to ci, którzy odejmując od 32 liczbę 15, uzyskali wynik 23. Najprawdopodobniej stosowali oni zasadę „od większej cyfry napisanej w danym rzędzie odejmujemy mniejszą, niezależnie od tego, czy cyfra jest w odjemnej czy w odjemniku”. Ci uczniowie, dodatkowo, zaprezentowali brak refleksji nad otrzymanym wynikiem: procedura odjęcia liczby 15 i dodania liczby 9 doprowadziła ich do wyniku początkowego: 32, mimo, że liczby 15 i 9 nie kompensują się.

► **Zadanie Mnożenie**

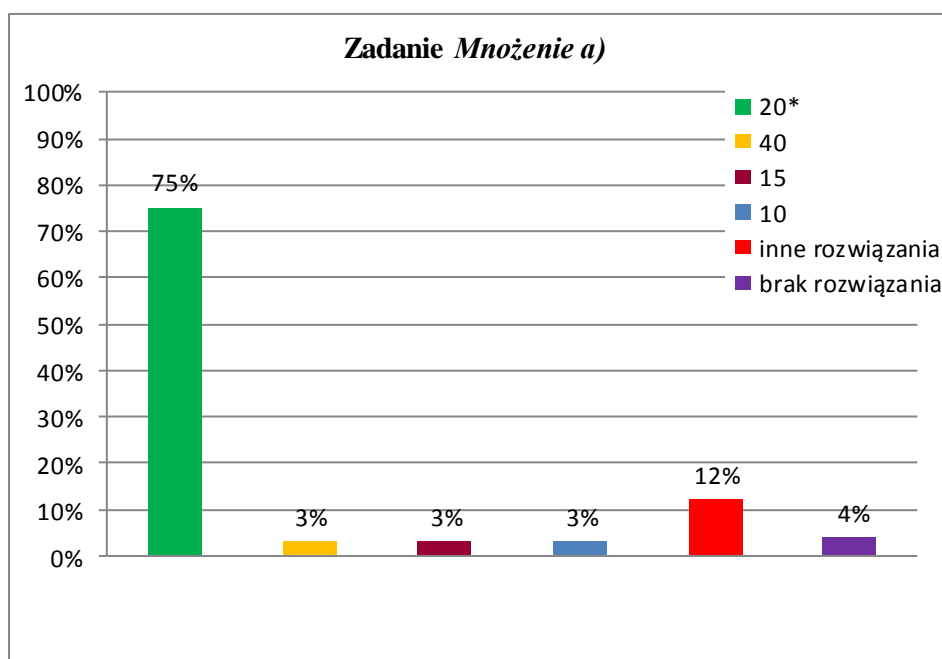
Wpisz w okienka odpowiednie liczby.

a) $2 \cdot \square = 5 \cdot 8$

b) $7 \cdot 9 = \square$

Zadanie sprawdza, czy uczeń rozumnie i sprawnie posługuje się tabliczką mnożenia. Przykład drugi jest typowym działaniem, natomiast w przykładzie pierwszym uczeń musiał wykazać się umiejętnością mnożenia z porównywaniem dwóch wartości. Dlatego uczeń powinien wykazać się rozumieniem sensu znaku równości, który nie może tutaj być utożsamiany ze znakiem wynikania. Dodatkowo, oczekiwana wartość do wpisania w okienko – liczba 20 wychodzi poza zakres mnożenia z zakresu tabliczki mnożenia, sprawdza jednak rozumienie mnożenia przez pełne dziesiątki, co jest również zagadnieniem powiązaniem z rozumieniem systemu pozycyjnego dziesiętnego. Zadanie sprawdzało więc także, czy uczeń potrafi swoją wiedzę i umiejętności rachunkowe wykorzystać w rozwiązaniu nowego dla siebie problemu.

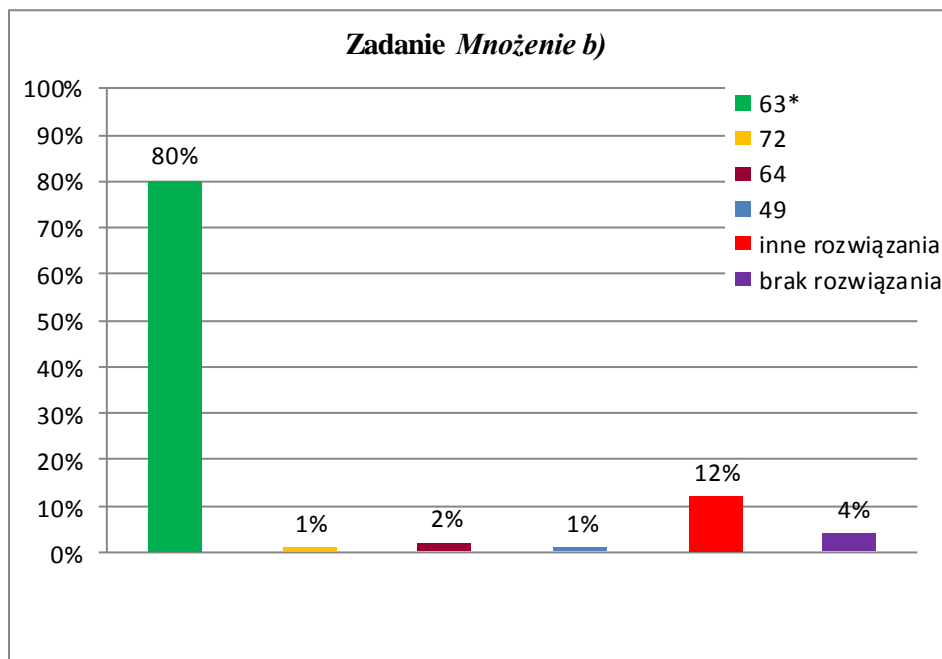
Wykres zamieszczone niżej przedstawiają procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w przykładach a) i b) w zadaniu *Mnożenie*.



Wykres 4. Zadanie Mnożenie a). Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Z rozwiązaniem pierwszego przykładu z zadania poradziło sobie 75% trzecioklasistów biorących udział w badaniu. Próby rozwiązania nie podjęło 4% uczniów. Liczby 10 i 40 były wpisywane w okienko tylko przez uczniów, którzy mieli najniższe umiejętności w całym obszarze *sprawność rachunkowa*. Te wyniki mogą być efektem trudności związanych z rozwiązywaniem zadań wieloetapowych

(Wynik 40 to efekt mnożenia zapisanego z prawej strony znaku równości, wynik 10 może być spowodowany dwukrotnym uwzględnieniem czynnika 2 zapisanego po lewej stronie. W obydwu tych sytuacjach uczeń nie potrafił zsynchronizować swojego myślenia z zapisem symbolicznym). Około 3% uczniów wpisało w okienko liczbę, którą powinien w okienko wpisać uczeń rozwiązujący drugą wersję arkusza (a więc najprawdopodobniej sąsiad z ławki).



Wykres 5. Zadanie Mnożenie b). Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Poprawnie rozwiązało ten przykład 80% trzecioklasistów biorących udział w badaniu. Próby rozwiązania nie podjęło tylko 4% uczniów.

Wynika stąd, że tylko 20% uczniów ma problemy z opanowaniem tabliczki mnożenia. Proste opanowanie tabliczki mnożenia nie musi oznaczać, że uczniowie potrafią ją wykorzystać nawet w tylko nieco bardziej złożonych obliczeniach. Pokazuje to różnica wyników między przykładem a) oraz b).

► **Zadanie Odejmowanie i dodawanie**

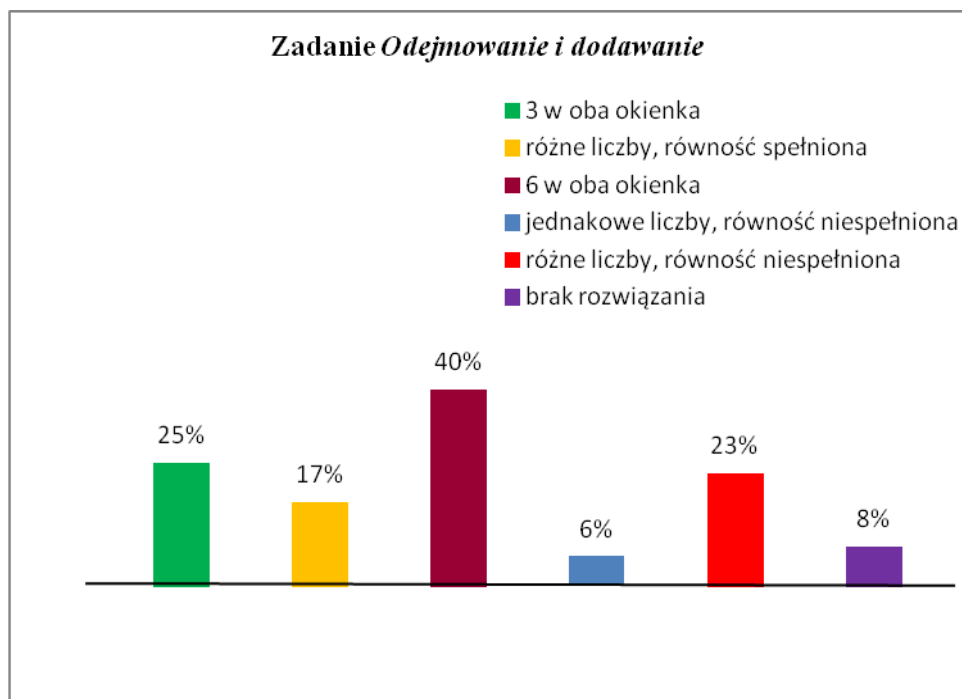
W oba kółka wpisz taką samą liczbę, tak aby wynik odejmowania był taki sam jak wynik dodawania.

$$22 - \bigcirc = 16 + \bigcirc$$

Aby poprawnie rozwiązać to zadanie uczeń potrzebował nie tylko wysokiej umiejętności wykonywania obliczeń. Musiał umieć dostrzec związki między odejmowaniem i dodawaniem, a także zauważyć, że w zadaniu należy kontrolować dwa warunki: w obu okienkach ma być ta sama liczba i taki sam wynik po lewej i prawej stronie. Duża część uczniów, którzy poradzili sobie z tym zadaniem podejmowała

kilka prób, wstawiając różne liczby i na podstawie zaobserwowanych regularności odkrywali właściwe rozwiązanie. Można więc powiedzieć, że w zadaniu chodziło także o umiejętność rozumnego korzystania z obliczeń, a nie tylko same obliczenia.

Wykres zamieszczony niżej przedstawia procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Odejmowanie i dodawanie*.



Wykres 6. Zadanie *Dodawanie i odejmowanie*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

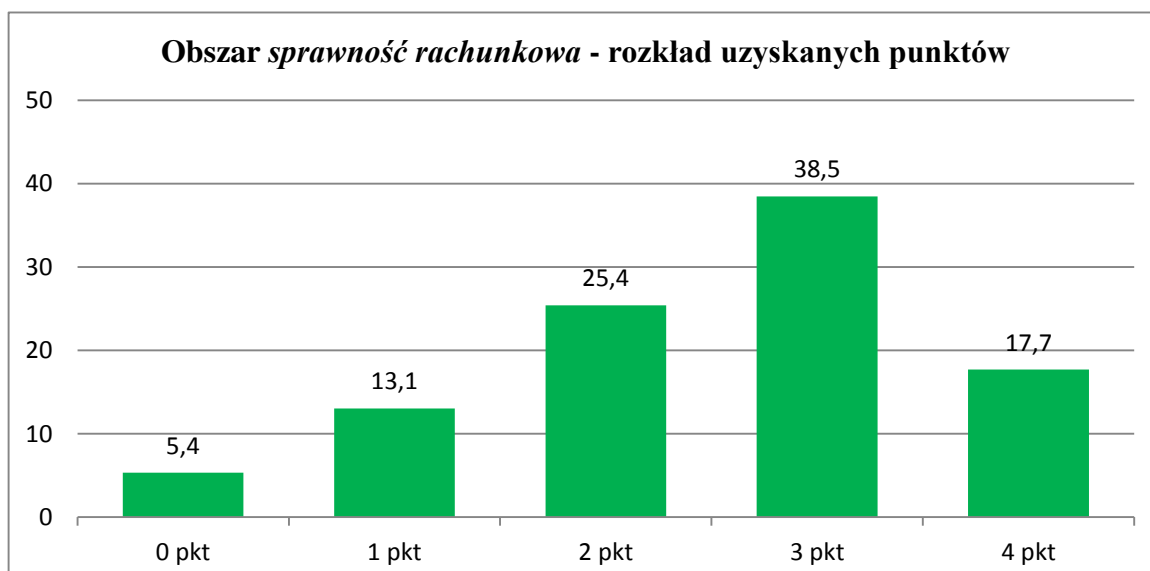
To zadanie okazało się bardzo trudne dla badanych uczniów. Z jego rozwiązaniem poradziło sobie tylko 25% trzecioklasistów. Aż 63% skupiło się tylko na jednym z warunków zapisanych w zadaniu: 17% wpisało w kółka różne liczby, ale wynik odejmowania był taki sam jak wynik oddawania, 6% jednakowe liczby, które jednak nie prowadziły do równości obu stron wyrażenia. Występowanie dwóch warunków równocześnie mogło być jednym z powodów tak niskiego wyniku. 40% badanych wpisało w oba okienka liczbę 6. Te 40% uczniów to ci którzy najprawdopodobniej potraktowali zapisany działanie związek jak dwa osobne przykłady: $22 - 6 = 16$ oraz $6 + 16 = 22$. Liczba 6 może też być wynikiem manipulacji występującymi w zadaniu liczbami: $22 - 16$ po to, by otrzymać „jakiś” wynik.

Prawidłowe rozwiązanie tego zadania wymagało od uczniów wypracowania pewnej strategii postępowania, wychodzącej poza proste zastosowanie technik rachunkowych,

Z matematycznego punktu widzenia, zadanie *Odejmowanie i dodawanie* ma konstrukcję tzw. zadania na przekładanie. Matematyczny sens tego zadania jest przecież taki sam, jak w zadaniu: „W pierwszym koszu jest 20 jabłek, a w drugim 16. Ile jabłek należy przełożyć z pierwszego kosza do drugiego, by w obu koszach było po tyle samo jabłek?” Warto sprawdzić, czy uczniowie lepiej sobie radzą z tego typu rozumowaniem w tej bardziej dynamicznej wersji.

3.1.3. Podsumowanie wyników obszaru *sprawność rachunkowa*

W obszarze *sprawność rachunkowa* uczeń mógł zdobyć maksymalnie 4 punkty. Znajdujący się niżej wykres prezentuje procentowy rozkład punktów, uzyskanych przez badanych uczniów.



Wykres 7. Obszar *sprawność rachunkowa*. Procentowy rozkład punktów uzyskanych przez badanych trzecioklasistów.

Prawie 20% badanych trzecioklasistów bezbłędnie rozwiązało wszystkie zadania z obszaru *sprawność rachunkowa*. Prawie wszyscy uczniowie, którzy rozwiązyli zadanie *Odejmowanie i dodawanie* rozwiązyli poprawnie także pozostałe zadania z tego obszaru. Można więc powiedzieć, że umiejętność rozwiązywania tego typu zadania wskazuje, że uczeń ma wysoką sprawność rachunkową, rozumianą tak jak zostało to ujęte we wstępnym opisie tego obszaru.

Także około 20% badanych uczniów otrzymało w tym obszarze 0 lub 1 punkt. Można więc wnioskować, że poważne problemy z wykonywaniem czterech podstawowych działań ma 1/5 badanych trzecioklasistów. Te braki uniemożliwiają im rozwiązywanie bardziej złożonych zadań.

Z analizy rozwiązań zadań i wyników można sądzić, że większość uczniów dobrze radzi sobie z typowymi zadaniami rachunkowymi. Warto zauważyć jednak, że około 30% uczniów ma problemy z prostymi przykładami, w których pojawia się więcej niż jedno działanie (jak w zadaniu *Dodawanie i odejmowanie*). Dlatego nie warto zmuszać uczniów do zapisywania rozwiązań złożonych zadań tekstowych jedną formułą arytmetyczną. Dla sporej grupy uczniów, którzy problem podany w zadaniu tekstowym potrafiliby rozwiązać, rozbijając go na kolejne kroki rachunkowe, barierą może okazać się właśnie ta formuła arytmetyczna obejmująca w jednym zapisie kilka działań.

Jak pokazało ostatnie z omawianych dotąd zadań, bardzo trudne dla trzecioklasistów jest jeszcze kontrolowanie dwóch warunków obliczeniowych podanych w jednym zadaniu. Nie oznacza to, że jest to zadanie bezużyteczne w procesie nauczania. W zestawieniu z innymi zadaniami o podobnej strukturze matematycznej pozwalają nauczycielowi nie tylko dobrze obserwować i ćwiczyć techniki rachunkowe uczniów ale także rozwijać szeroko rozumianą sprawność rachunkową.

3.2. Obszar rozwiązywanie zadań tekstowych

3.2.1. Opis obszaru rozwiązywanie zadań tekstowych

Sześć z piętnastu zadań znajdujących się w arkuszu K3 należy do obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych*. Badano nimi wiele umiejętności: rozumienie tekstu matematycznego, analizę informacji podanych w treści zadania, umiejętność zapisania rozwiązywanego problemu.

Zadania te wymagały od ucznia wiadomości z różnych dziedzin matematyki szkolnej. Sprawdzały też, czy uczniowie potrafią korzystać z posiadanych umiejętności matematycznych przy rozwiązywaniu nieznanym im wcześniej problemów.

Obszar *rozwiązywanie zadań tekstowych* został podzielony na dwa podobszary:

- rozważanie możliwości,
- dostrzeganie zależności.

Na kolejnych stronach omawiamy zadania z obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych* w kolejności uwzględniającej podział na te podobszary.

W zadaniach z obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych* sprawdzano poziom opanowania następujących umiejętności, zapisanych w podstawie programowej kształcenia ogólnego:

- umiejętność wykorzystywania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów;
- umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych.

Uwzględniono przy tym wybrane, opisane w podstawie programowej, wymagania szczegółowe na zakończenie klasy III szkoły podstawowej, a w szczególności:

Uczeń:

- *rozwiązuje proste zadania tekstowe (w tym zadania na porównywanie różnicowe, ale bez porównywania ilorazowego);*
- *odmierza płyny różnymi miarkami; używa określeń: litr, pół litra, ćwierć litra;*
- *wykonuje łatwe obliczenia pieniężne (cena, ilość, wartość) i radzi sobie w sytuacjach codziennych wymagających takich umiejętności; zna bieżące w obiegu monety i wartości;*
- *wykonuje obliczenia kalendarzowe w sytuacjach życiowych;*
- *waży przedmioty, różnicuje przedmioty cięższe, lżejsze; używa określeń: kilogram, pół kilograma, dekagram, gram;*
- *wykonuje łatwe obliczenia, używając tych miar (bez wyrażeń dwumianowanych i zamiany jednostek w obliczeniach formalnych);*
- *porównuje dowolne dwie liczby w zakresie 1000;*
- *dodaje i odejmuje liczby w zakresie 100 (bez algorytmów działań pisemnych)*

3.2.2. Podobszar *rozważanie możliwości*

Opis podobszaru *rozważanie możliwości*

W zadaniach z podobszaru *rozważanie możliwości*, uczeń musiał wykazać się uważną analizą tekstu zadania i przeprowadzeniem prostego rozumowania. Do poprawnego rozwiązania potrzebował też umiejętności wybrania skutecznej strategii postępowania. Można było na przykład analizować różne możliwe przypadki sytuacji opisanej w tekście zadania i eliminować te, które nie spełniały wszystkich podanych warunków.

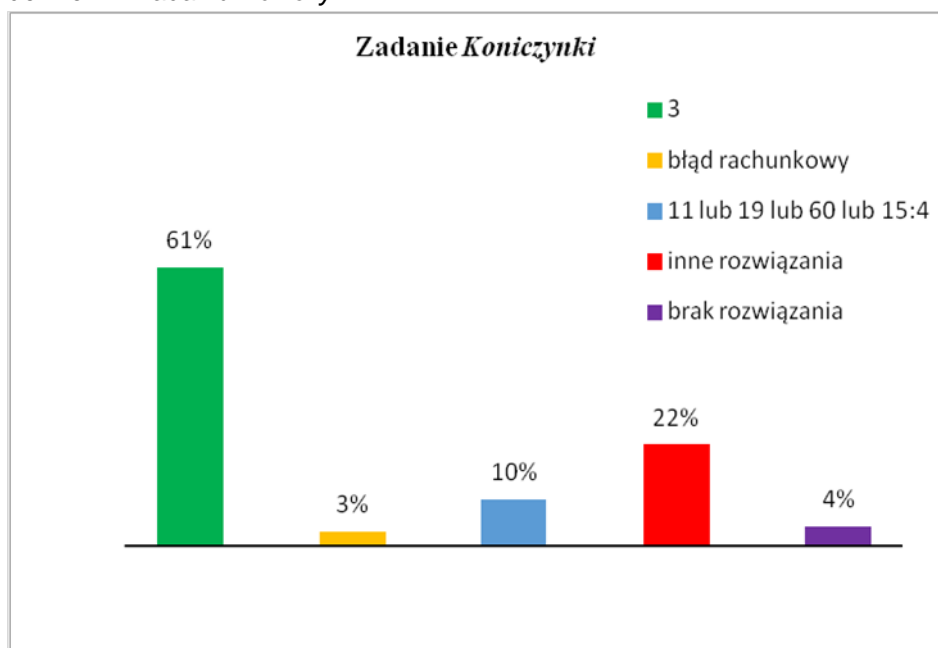
Umiejętności te są szczególnie przydatne przy rozwiązywaniu problemów, w których uczeń musi kontrolować spełnianie więcej niż jednego warunku. Na tym etapie nauczania, skuteczne okazuje się dobrze zaplanowane stosowanie metody prób i poprawek, czyli podjęcie próby odgadnięcia możliwego rozwiązania, a później sprawdzenie, czy propozycja spełnia warunki zadania i ewentualne skorygowanie odpowiedzi.

Analiza wykonania zadań z podobszaru *rozważanie możliwości*

► Zadanie *Koniczynki*

Ania zerwała 4 koniczynki. Były wśród nich koniczynki czterolistne i trzylistne. Razem miały 15 listków. Ile czterolistnych koniczynek zerwała Ania?

Zadanie sprawdza, czy uczeń potrafi wykorzystać informacje podane w treści i zbudować skuteczną strategię rozwiązania. Dane liczbowe, zawarte w treści zadania, zostały podane w zróżnicowany sposób: za pomocą symboliki cyfrowej oraz słownie. Stąd dodatkową trudnością dla niektórych uczniów mogły być dwie istotne informacje liczbowe zapisane w treści słowami (czterolistne i trzylistne) oraz nie wprost podana informacja, że wśród 4 koniczynek było przynajmniej po jednej koniczynce każdego rodzaju. Mimo, że zadanie jest złożone i rozwiązania nie można osiągnąć przez proste rachunki na liczbach podanych w treści, zostało ono poprawnie rozwiązane przez ponad 60% badanych uczniów. Na wykresie zamieszczonym na kolejnej stronie przedstawiono procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Koniczynki*.



Wykres 8. Zadanie *Koniczynki*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

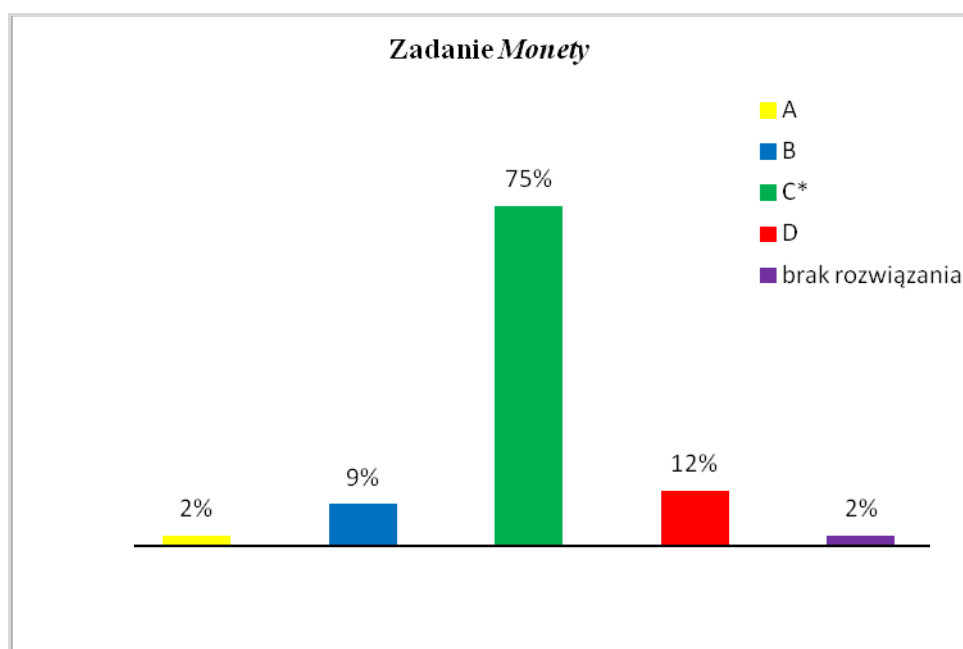
Odpowiedzi 60 (4·15) albo 19 (4 + 15) albo 11 (15 – 4) albo 15 : 4 udzieliło łącznie 10% uczniów. Byli to uczniowie, którzy w całym obszarze *rozwiązywanie zadań tekstowych* osiągnęli najslabsze wyniki. Być może ci uczniowie nie byli w stanie uważnie zanalizować treści zadania. Wykorzystali oni dwie liczby zapisane w zadaniu cyframi i wybrane działanie. Mimo, że w zadaniu pojawia się słowo klucz „razem” to uczniów, którzy wskazali odpowiedź wynikająca z działania 4 + 15 jest mniej niż uczniów, którzy wykonali odejmowanie 15 – 4. Wśród uczniów, których wynik w całym obszarze był średni lub wyższy takie odpowiedzi nie pojawiały się. Niewielka (1%) grupa uczniów uznała, że wśród zerwanych koniczynek były tylko koniczynki trzylistne. To ci uczniowie, którzy nie zauważyli informacji podanej w treści zadania, że wśród zerwanych koniczynek były i czterolistne, i trzylistne. Na uwagę zasługuje fakt, że prawie 1/3 trzecioklasistów wsparła swoje rozwiązanie rysunkiem lub nawet przedstawiło rysunek jako rozwiązanie zadania. Wśród nich 85% rozwiązało zadanie w pełni poprawnie. Wśród uczniów, którzy nie wsparli swojego rozumowania rysunkiem poprawne rozwiązania zdarzały się znacznie rzadziej (50%).

► Zadanie *Monety*

Którą z powyższych kwot można wypłacić dwiema monetami?

- A. 9 zł B. 8 zł C. 7 zł D. 5 zł

Aby rozwiązać to zadanie uczeń powinien nie tylko dobrze rozłożyć sumę (podana kwotę) na dwa składniki, ale musiał też wiedzieć, jakie nominały monet są w użyciu i skojarzyć te nominały z wartościami składników. Wykres 9. przedstawia procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Monety*.



Wykres 9. Zadanie *Monety*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Trzy czwarte badanych uczniów poradziło sobie z rozwiązaniem tego zadania. Wśród błędnych odpowiedzi, uczniowie najczęściej wybierali odpowiedź D. 5 zł (12% badanych). Wśród uczniów, którzy osiągnęli najniższe wyniki w badaniu, ta odpowiedź była bardziej popularna niż odpowiedź prawidłowa. Odpowiedź D. i inną błędną odpowiedź B. 8 zł wskazała łącznie prawie połowa uczniów, którzy z zadaniami z obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych* radzili sobie najslabiej. Ale takie wskazania zdarzały się też uczniom, którzy w tym obszarze osiągnęli wynik średni. Być może ci uczniowie zrozumieli, że w zadaniu pytamy o kwotę, którą można wypłacić dwoma rodzajami monet.

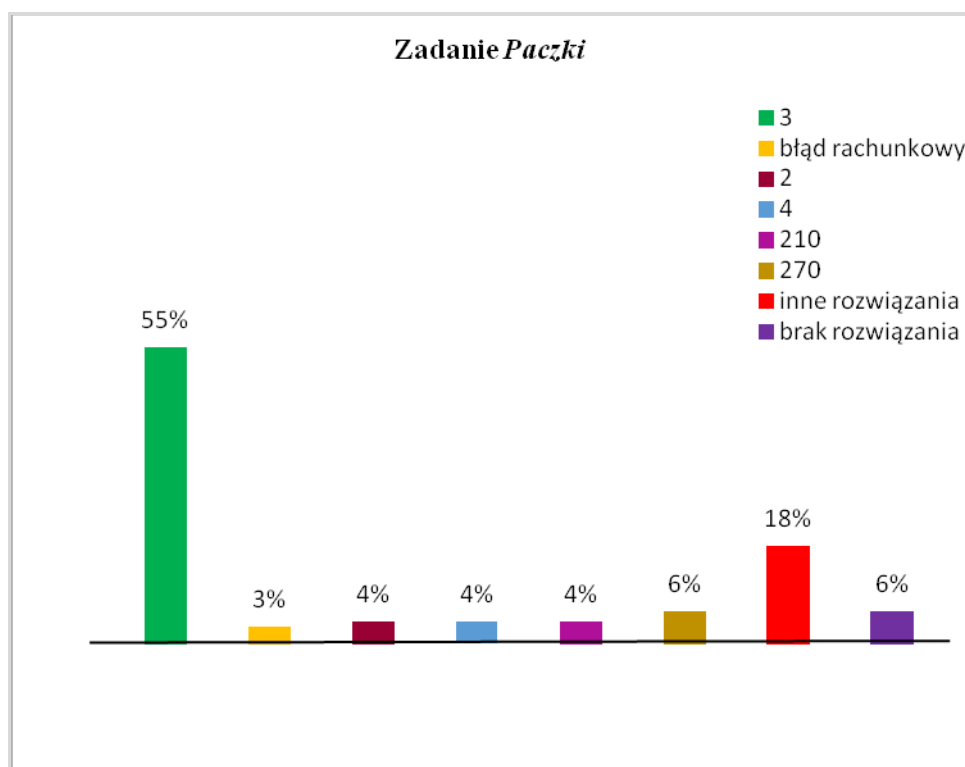
► Zadanie *Paczki*

W magazynie są jednakowe paczki. Każda paczka waży 90 kg. Napis na paczce oznacza, że postawione na niej przedmioty nie mogą razem ważyć więcej niż 300 kg.



Ile najwięcej paczek można postawić na takiej paczce, aby nie przekroczyć zalecanego obciążenia?

Zadanie w dość nietypowy sposób odnosi się do problematyki związanej z ważeniem. W treści zadania podane jest wyjaśnienie określenia „max”, którego znaczenia uczeń mógł wcześniej nie znać. Aby poprawnie rozwiązać to zadanie uczeń musiał uważnie przeczytać i zrozumieć informacje zawarte w treści. Dopiero potem mógł przystąpić do matematyzacji problemu. Rysunek mógł niektórym uczniom ułatwić interpretację tych informacji. Na poniższym wykresie przedstawiamy procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Paczki*.



Wykres 10. Zadanie *Paczki*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

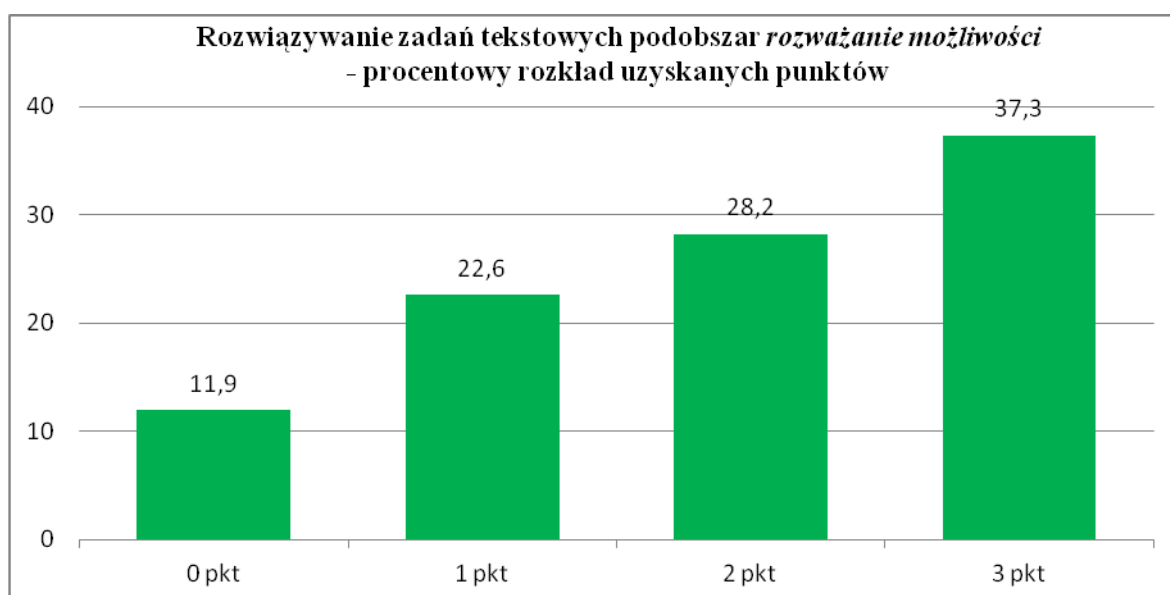
Zadanie poprawnie rozwiązało 55% uczniów. Uczniowie, którzy jako odpowiedź zapisali liczbę 4 (4%) prawdopodobnie doliczyli także paczkę, na której stawiano kolejne paczki. Podobnie być może postąpili uczniowie, którzy jako odpowiedź zapisali liczbę 2 (4%). Obliczyli, że można postawić trzy paczki i zabrali jedną uznając, że to ta, na której stawiamy kolejne. Być może liczbę 2 zapisali także uczniowie, którzy nie zwrócili uwagi na to, że w zadaniu pytamy o największą możliwą do postawienia liczbę

paczek. Aż 6% uczniów jako odpowiedź podało liczbę 270. To trzecioklasiści, którzy poprawnie obliczyli, ile mogą ważyć paczki postawione na tej narysowanej, ale nie przekodowali tego wyniku na liczbę paczek. Taka usterka najczęściej zdarzała się uczniom o średnich wynikach w całym obszarze. Natomiast odpowiedź 210, będący najczęściej skutkiem wykonania przez ucznia działania $300 - 90$, podawali głównie uczniowie, którzy w całym obszarze rozwiązywanie zadań tekstowych osiągnęli niski wynik.

Prawie 12% badanych uczniów przy rozwiązywaniu zadania *Paczki* wykonało rysunek. Trzy czwarte z tych uczniów rozwiązało zadanie poprawnie.

Podsumowanie wyników podobszaru *rozważanie możliwości*

W obszarze *rozwiązywanie zadań tekstowych*, w podobszarze *rozważanie możliwości*, każdy uczeń mógł zdobyć maksymalnie 3 punkty. Wykres 11. prezentuje procentowy rozkład punktów uzyskanych przez trzecioklasistów.



Wykres 11. Obszar *rozwiązywanie zadań tekstowych*, podobszar *rozważanie możliwości*. Procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów.

Ponad 37% badanych uczniów poprawnie rozwiązało wszystkie zadania z tego podobszaru, a ponad 65% uczniów rozwiązało dwa lub trzy zadania. Prawie 12% trzecioklasistów nie rozwiązało poprawnie ani jednego zadania. Analiza podawanych przez uczniów rozwiązań wskazuje na ich przyczyny. Często jest nią nieodpowiednie przeczytanie tekstu zadania i nieumiejętność zastosowania się do zamieszczonych tam założeń. Z drugiej strony widać, że samodzielne stworzenie rysunku przez ucznia jest elementem wspierającym znalezienie odpowiedniego rozwiązania. Nauczyciele powinni dokładnie zanalizować przyczyny niepowodzeń własnych uczniów przyglądając się rodzajom błędów przez nich popełnianym.

3.2.3. Podobszar *dostrzeganie zależności*

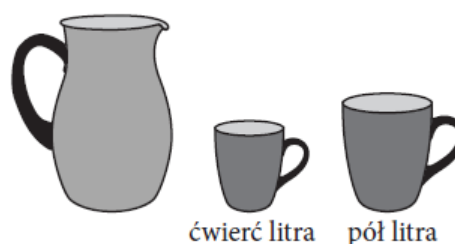
Opis podobszaru *dostrzeganie zależności*

W zadaniach z tego obszaru najważniejsza była umiejętność analizowania związków między wielkościami opisanymi w zadaniu. Uczeń musiał wykazać się uważną analizą tekstu zadania, umiejętnością dostrzeżenia zależności między informacjami w nim podanymi, rozumowaniem i wyciągnięciem wniosków. Rozwiązywanie tego typu zadań, na I etapie edukacyjnym, przygotowuje uczniów do rozwiązywania na kolejnych etapach zadań, w których istotną rolę odgrywa modelowanie matematyczne, rozumowanie i tworzenie strategii. Są to najważniejsze cele nauczania matematyki opisane w podstawie programowej.

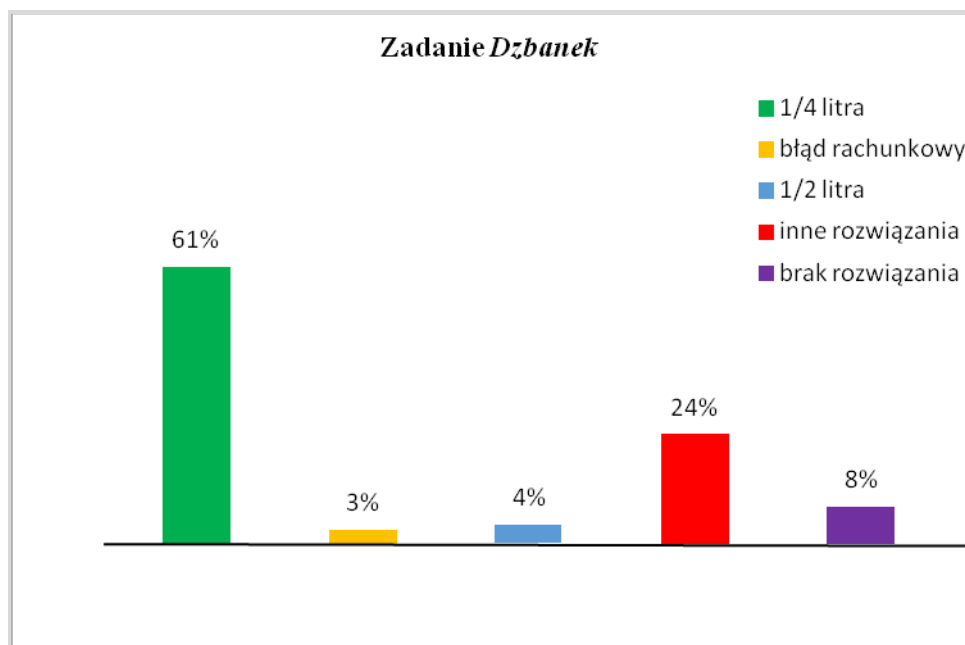
Analiza wykonania zadań z podobszaru *dostrzeganie zależności*

► Zadanie *Dzbanek*

Jacek miał dzbanek, mały kubek i duży kubek. W dzbanku był 1 litr soku. Jacek napełnił oba kubki sokiem z dzbanka. Ile soku pozostało w dzbanku?



Zadanie pozwala sprawdzić, czy uczniowie dobrze rozumieją pojęcia podstawowych miar pojemności (litr, pół litra, ćwierć litra) i czy potrafią się nimi posługiwać. Można za jego pomocą ocenić gotowość uczniów do wprowadzenia pojęcia ułamków. Na wykresie przedstawiamy procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Dzbanek*.



Wykres 12. Zadanie *Dzbanek*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Ponad 60% uczniów rozwiązało to zadanie poprawnie. Za takie uznawaliśmy także rozwiązania, w którym uczeń przeprowadził poprawne rozumowanie, ale z błędnym przeliczeniem litrów na mililitry. Takie błędne przeliczanie może być skutkiem zbyt wczesnego wprowadzania zamiany jednostek,

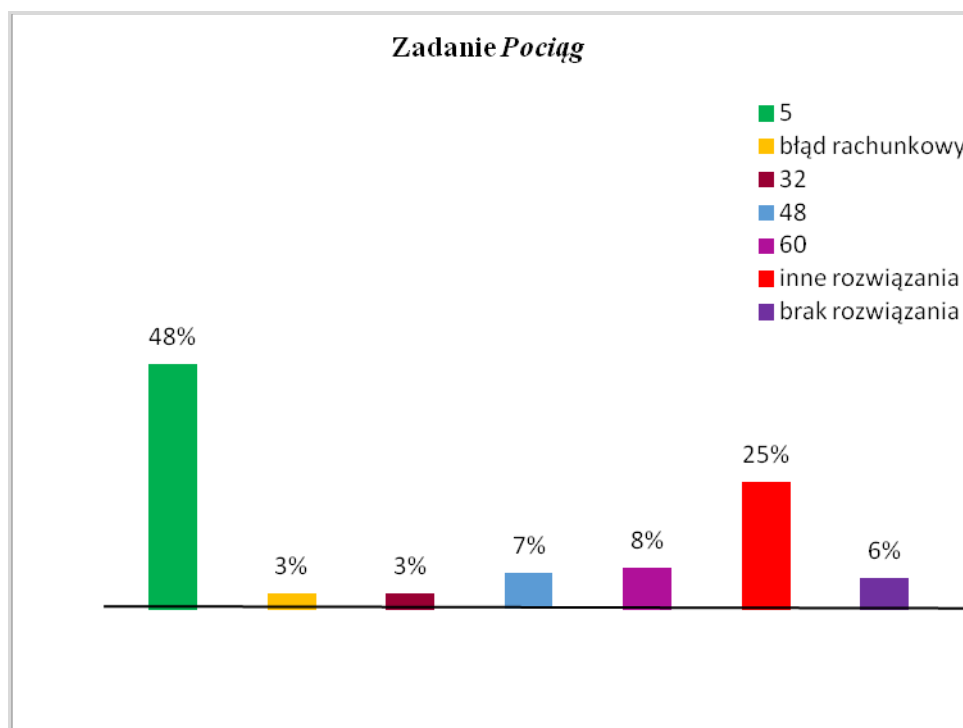
zanim jeszcze uczniowie opanowali dobrze porównywanie pojemności wyrażonych tą samą jednostką. Aż 8% uczniów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania. Wyniki tego zadania pokazują, jak delikatnie nauczyciele klas czwartych muszą wprowadzać pojęcie ułamków. Aż 40% uczniów może mieć z nim problemy przy zbyt szybkim i pobieżnym przejściu przez podstawowe intuicje związane z ułamkami.

Jedna dziesiąta badanych uczniów wsparła rozwiązanie tego zadania rysunkiem lub przedstawiła całe rozwiązanie tylko za pomocą rysunku.

► Zadanie Pociąg

Jaś policzył, że stojący na dworcu pociąg ma 46 kół. Lokomotywa pociągu miała 6 kół, a doczepione do niej wagony po 8 kół. Ile wagonów było doczepionych do lokomotywy?

Zadanie sprawdza, czy uczeń potrafi dostrzec zależności między informacjami podanymi w treści. Rozwiązanie tego problemu wymagało od ucznia uważnej analizy tekstu i zbudowania odpowiedniego modelu opisanej sytuacji. Na wykresie niżej prezentujemy procentowy rozkład odpowiedzi uczniowskich w zadaniu *Pociąg*.



Wykres 13. Zadanie *Pociąg*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Poprawne rozumowanie podczas rozwiązania tego zadania przeprowadziła ponad połowa badanych trzecioklasistów (część popełniła błąd rachunkowy). Najczęściej popełnianym przez najślabszych uczniów błędem było podanie odpowiedzi 60 ($46 + 6 + 8$). Prawdopodobnie ci uczniowie nie zanalizowali dokładnie treści zadania i być może uznali słowo „doczepionych” za kluczowe, oznaczające dodawanie. Uczniowie, którzy udzielili odpowiedzi 48 ($6 \cdot 8$) i 32 ($46 - 6 - 8$) także mieli kłopot z analizą tekstu zadania. Na uwagę zasługuje też, że najprawdopodobniej te 18% uczniów po przeprowadzeniu swoich obliczeń nie wróciło już do pytania, na które starali się odpowiedzieć.

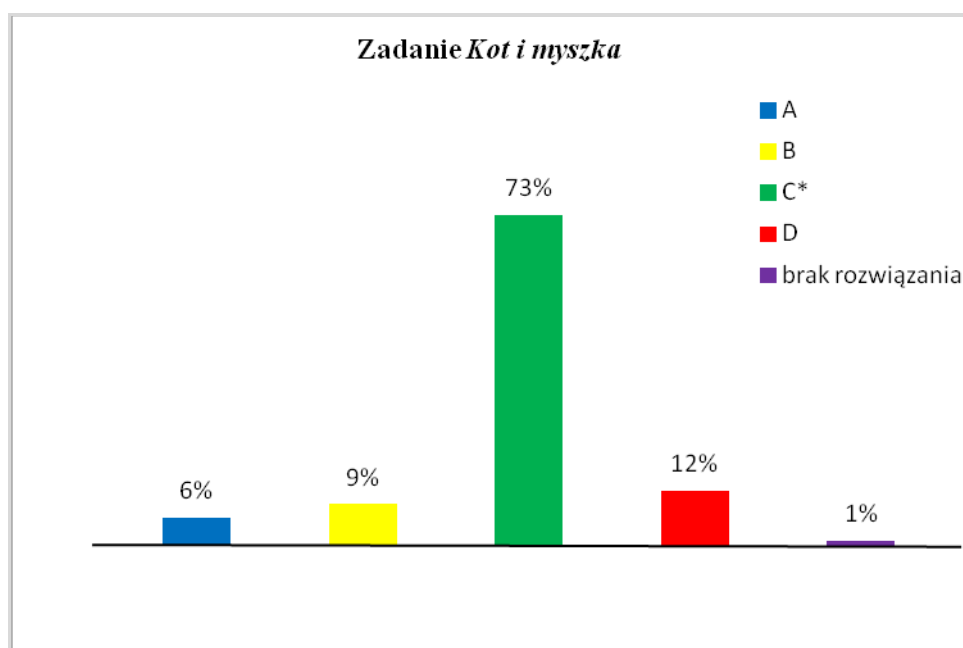
Okolo 9% procent uczniów wsparło rozwiązanie tego zadania rysunkiem. Ponad dwie trzecie z nich rozwiązało to zadanie poprawnie.

► Zadanie *Kot i myszka*

Kot ma dwa lata, a myszka trzy miesiące. O ile miesięcy kot jest starszy od myszki?

- A. O 8 miesięcy. B. O 9 miesięcy. C. O 21 miesięcy. D. O 27 miesięcy.

Rozwiązanie tego zadania wymagało od ucznia przede wszystkim uważnej analizy treści. Niezbędne też były podstawowe umiejętności związane z obliczeniami kalendarzowymi. Na wykresie przedstawiamy procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Kot i myszka*.



Wykres 14. Zadanie *Kot i myszka*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

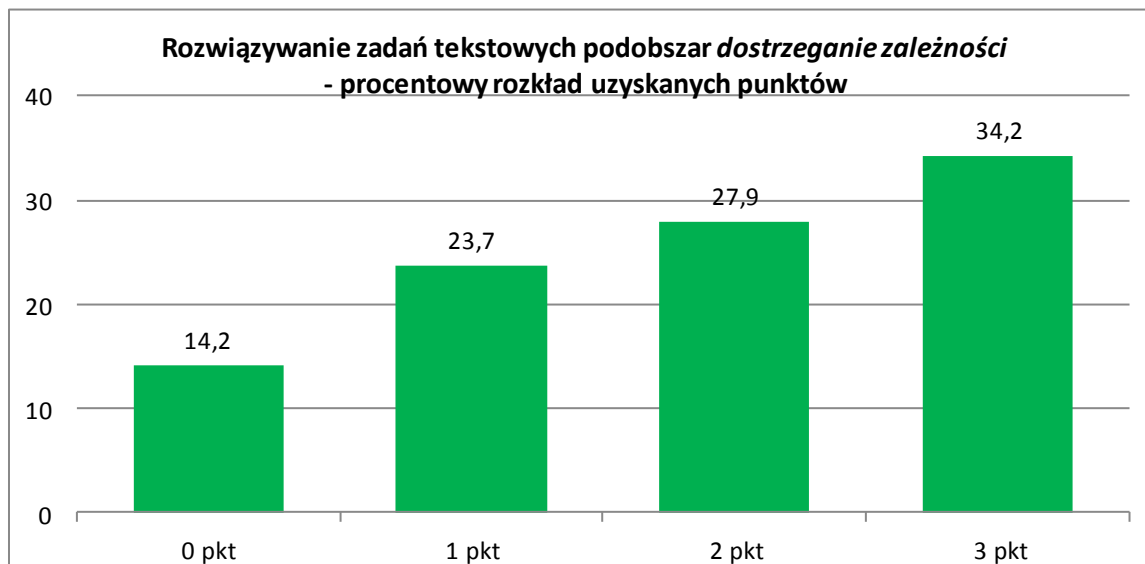
Prawie trzy czwarte uczniów poprawnie rozwiązało to zadanie. Ale aż 12% badanych uznało, że prawidłowe rozwiązanie to dodanie do siebie wieku kota (w miesiącach) i myszy (D. O 27 miesięcy). Odpowiedź ta była najbardziej popularną błędną odpowiedzią wśród tych uczniów, którzy w obszarze *rozwiązywanie zadań tekstowych* osiągnęli wynik poniżej średniego. Możliwe, że ci uczniowie przyzwyczajeni są do zadań, w których pojawia się tylko jedna trudność i po odkryciu, że chodzi o zamianę dwóch lat na liczbę miesięcy, resztę obliczeń wykonali mechanicznie. Równie możliwe, że posłużyli się tutaj słowem – kluczem, kojarząc określenie „starszy” z dodawaniem.

Mimo, że wszystkie informacje liczbowe w zadaniu były zapisane słowami, czyli żadna liczba zapisana cyframi nie skupiała uwagi uczniów, to 8% uczniów przeoczyło, że kot miał dwa lata i wykonało swoje obliczenia dla rocznego kota. Być może także ci uczniowie mocno skupili się na przypomnieniu sobie ile miesięcy ma rok.

Odpowiedzi A. (A. O 8 miesięcy) udzieliło 6% uczniów – najprawdopodobniej podzielili oni wiek kota przez wiek myszy (w miesiącach) lub wybrali tę odpowiedź całkiem przypadkowo.

Podsumowanie wyników podobszaru *dostrzeganie zależności*

W obszarze *rozwiązywanie zadań tekstowych*, w podobszarze *dostrzeganie zależności*, każdy uczeń mógł uzyskać maksymalnie 3 punkty. Wykres prezentuje procentowy rozkład punktów uzyskanych przez trzecioklasistów.

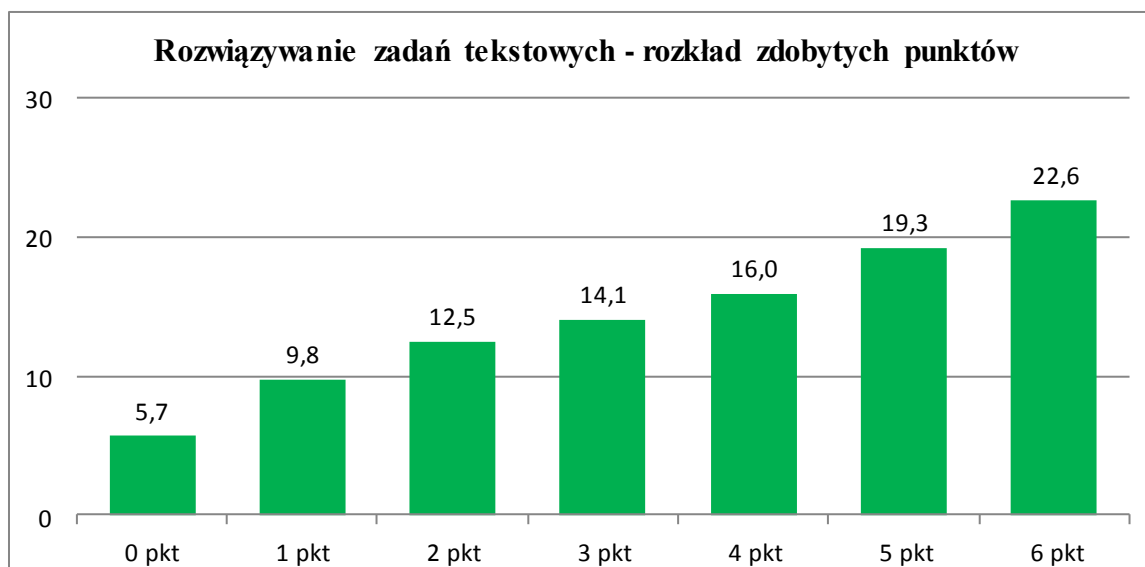


Wykres 15. Obszar *rozwiązywanie zadań tekstowych*, podobszar *dostrzeganie zależności*. Procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów

Ponad 34% badanych poradziło sobie z poprawnym rozwiązaniem wszystkich zadań z tego podobszaru. Także ponad 14% trzecioklasistów nie rozwiązało poprawnie ani jednego zadania, a kolejne 24% rozwiązało poprawnie tylko jedno z zadań tego podobszaru. Dwa lub trzy zadania rozwiązało ponad 60% uczniów, co równocześnie wskazuje, że ok. 40% uczniów nie radzi sobie z rozwiązywaniem zadań tego typu. Takie wyniki potwierdzają, że uczniowie mają problemy z prawidłową analizą związków zawartych w zadaniu, nie potrafią dokonać właściwej matematyzacji.

3.2.4. Podsumowanie wyników obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych*

Rozwiązywanie zadań tekstowych, wiąże się z umiejętnością uważnego przeczytania tekstu, zrozumienia jego struktury, znalezienie informacji koniecznych do rozwiązania postawionego w nim problemu i własnej strategii jego rozwiązania. W każdym z zadań tekstowych użytych w tym badaniu trzecioklasiści musieli się wykazać umiejętnością rozumowania. W obszarze *rozwiązywanie zadań tekstowych* każdy uczeń mógł zdobyć maksymalnie 6 punktów. Procentowy rozkład punktów uzyskanych w tym obszarze przez badanych trzecioklasistów pokazuje Wykres 16.



Wykres 16. Obszar rozwiązywanie zadań tekstowych. Procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów.

Średni wynik ucznia w tym obszarze to 3,7 punktu na 6 możliwych do uzyskania. Poprawnie rozwiązało wszystkie zadania z obszaru *rozwiązywanie zadań tekstowych* ponad 20% badanych trzecioklasistów.

Ponad 25% uczniów rozwiązało co najwyżej dwa zadania z tego obszaru. Uczniowie ci wymagają szczególnej uwagi nauczyciela w klasie IV, a wcześniej analizy co jest przyczyną tak niskiego wyniku w tym obszarze. Przyczyną niepowodzeń uczniów w rozwiązywaniu zadań tekstowych może być także niska umiejętność czytania w ogóle lub brak umiejętności czytania tekstów o charakterze matematycznym.

3.3. Obszar wyobraźnia geometryczna

3.3.1. Opis obszaru wyobraźnia geometryczna

Rozwiązując zadania z obszaru *wyobraźnia geometryczna* uczeń musiał, oprócz umiejętności czytania tekstu matematycznego, wykazać się prawidłowym postrzeganiem i interpretowaniem obiektów przedstawionych na rysunku, rozumowaniem i umiejętnością wyciągania wniosków. Zadania z tego obszaru sprawdzały, w jakim stopniu uczniowie mają wyrobione podstawowe intuicje geometryczne, jak sprawnie potrafią posługiwać się w wyobraźni figurami geometrycznymi oraz czy znają i rozumieją podstawowe pojęcia związane z figurami geometrycznymi.

Większość zadań z obszaru *wyobraźnia geometryczna* oparta była na rysunkach. Do ich rozwiązania niezbędna jest wyobraźnia, którą na lekcjach warto kształtować nie tylko za pomocą rysunków, ale także konkretnych przedmiotów oraz modeli figur płaskich i przestrzennych.

W zadaniach z obszaru *wyobraźnia geometryczna* sprawdzano poziom opanowania następujących umiejętności, zapisanych w podstawie programowej kształcenia ogólnego:

- umiejętność wykorzystywania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów;
- umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych.

Uwzględniono przy tym wybrane, opisane w podstawie programowej, wymagania szczegółowe na zakończenie klasy III szkoły podstawowej, a w szczególności:

Uczeń:

- *dostrzega symetrię; rysuje drugą połowę symetrycznej figury;*
- *rozpoznaje i nazywa koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie);*
- *oblicza obwody trójkątów i prostokątów (bez wyrażeń dwumianowanych i zamiany jednostek w obliczeniach formalnych);*
- *wyprowadza kierunki od siebie i innych osób; określa położenie obiektów względem obranego obiektu, używając określeń: góra, dół, przód, tył, w prawo, w lewo oraz ich kombinacji;*
- *posługuje się jednostkami: milimetr, centymetr, metr; wykonuje łatwe obliczenia dotyczące tych miar (bez wyrażeń dwumianowanych i zamiany jednostek w obliczeniach formalnych).*

3.3.2. Podobszar *intuicje geometryczne*

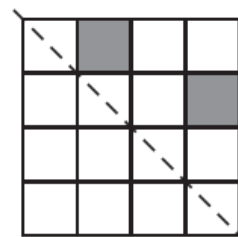
Opis podobszaru *intuicje geometryczne*

Zadania z tego podobszaru pozwalały sprawdzić, w jakim stopniu uczniowie mają wyrobione te podstawowe intuicje geometryczne, które będą konieczne na dalszych etapach nauki. O sukcesie ucznia decydowały więc w głównej mierze wcześniejsze ćwiczenia polegające na manipulacji modelami figur geometrycznych i ćwiczenia związane z wyobrażaniem sobie różnego położenia figur i ruchu figur.

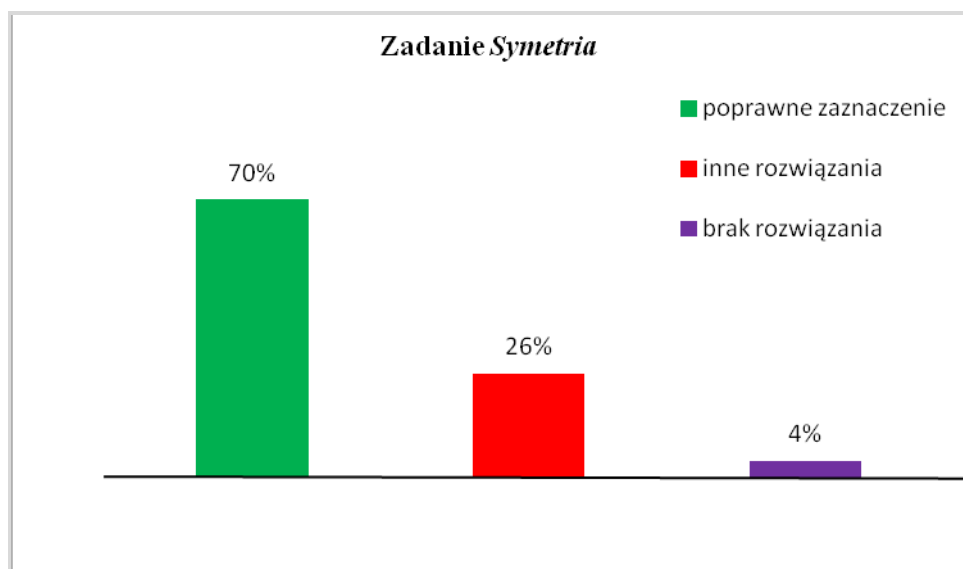
Analiza wykonania zadań z podobszaru *intuicje geometryczne*

► Zadanie *Symetria*

Hania zamalowała farbą na papierze w kratkę dwa kwadraciki tak, jak na rysunku obok. Następnie złożyła kratkę wzdłuż przerywanej linii. Zamalowane pola odbiły się po drugiej stronie linii. Zaznacz kwadraciki, na których odbiła się farbka.



Zadanie sprawdza, czy uczeń rozumie pojęcie symetrii i potrafi wyobrazić sobie drugą połowę figury symetrycznej w sytuacji, gdy oś symetrii nie jest linią poziomą ani pionową. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Symetria* przedstawia wykres przedstawiony niżej.

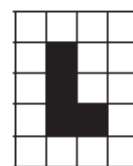


Wykres 17. Zadanie *Symetria*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

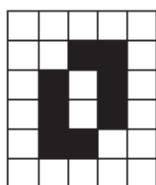
Rozwiązanie zadania nie sprawiło uczniom większych trudności. Poprawną odpowiedź wskazało 70% badanych. Wskazuje to na niezłe intuicje związane z symetrią osiową, nawet w sytuacji kiedy oś symetrii jest skośna w stosunku do brzegów kartki. Tylko 4% uczniów nie podjęło się rozwiązania tego zadania. Niepokój budzi fakt, że aż 7% trzecioklasistów zamalowało kratki, które były poprawną odpowiedzią w drugiej wersji arkusza, niż ten przez nich rozwiązywany (a więc mogli oni bezmyślnie przerysować rozwiązanie od kolegi z ławki).

► **Zadanie Pieczętka**

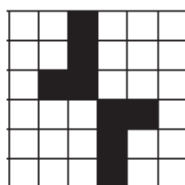
Kasia ma pieczętkę, za pomocą której może odbijać figury takie, jak na rysunku obok.



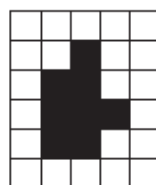
Którego z czterech poniższych obrazków nie można otrzymać za pomocą tej pieczętki?



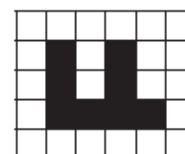
A.



B.

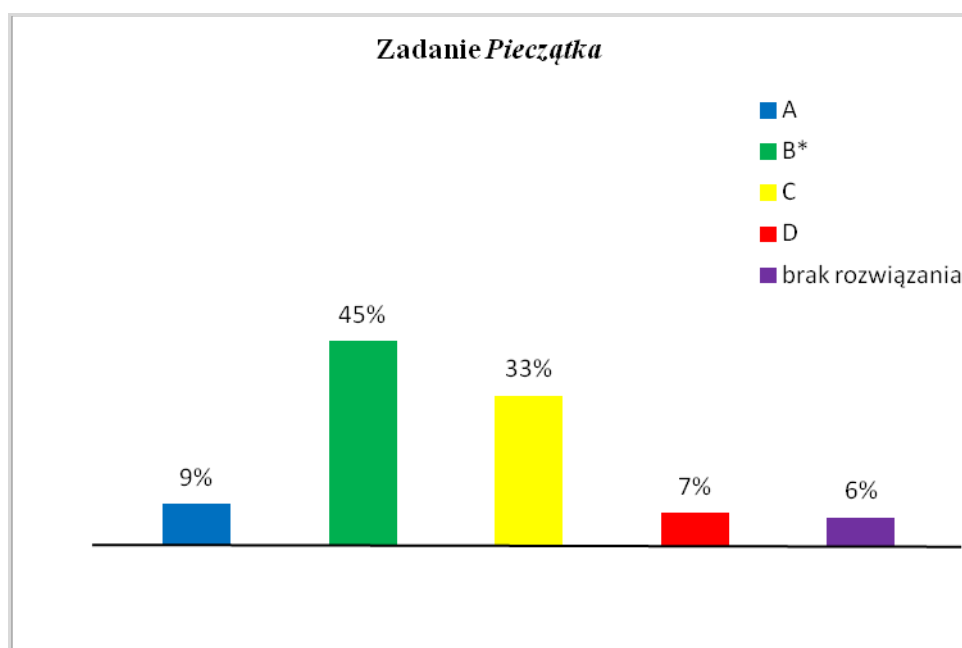


C.



D.

Zadanie sprawdza, czy uczeń potrafi wyobrazić sobie ruch figury (głównie obrót i przesunięcie równoległe) i czy zdaje sobie sprawę, że niektórych możliwości nie da się uzyskać za pomocą pieczętki (są one efektem odbicia symetrycznego, zmieniającego orientację). Poniższy wykres przedstawia procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Pieczętka*.



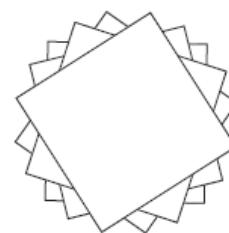
Wykres 18. Zadanie *Pieczętka*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Prawidłową odpowiedź (B.) wskazało tylko 45% uczniów. Wskazuje to na znaczne problemy uczniów z wyobrażaniem sobie akcji (czynności manipulowania). Aż 33% trzecioklasistów zaznaczyło odpowiedź C. Być może figury przedstawionej na tym rysunku nie potrafili podzielić na dwie części w kształcie litery L i widzieli ją jako prostokąt i dwa małe kwadraty. Mają więc wyraźne problemy z wyróżnianiem figury z tła, co może być istotną trudnością na dalszych etapach nauki geometrii. W powiązaniu z wynikami odpowiedzi D., w której również dwie figury są sklejone, tak funkcjonujący uczniowie tworzą grupę 40%. Kolejne 9% uczniów, którzy wskazali odpowiedź A. ma kłopoty z wyobrażaniem sobie położenia figur po wykonaniu obrotu o 180° , czyli z intuicją symetrii środkowej. Około 6% badanych opuściło to zadanie, co można świadczyć o tym, że zadanie wydało się części uczniów trudne.

► **Zadanie Serwetki**

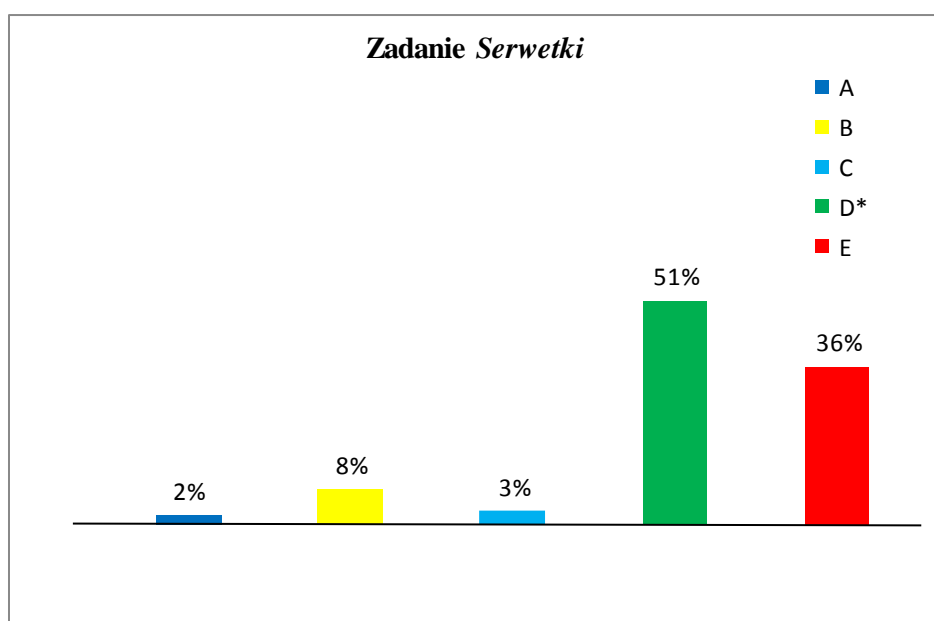
Mama ułożyła kwadratowe serwetki tak, jak na rysunku obok.
Ile serwetek widać na tym rysunku?

- A. 20 B. 16 C. 10 D. 5 E. 4



Zadanie wymagało od ucznia zarówno wiedzy o własnościach kwadratu, jak i posługiwania się wyobraźnią geometryczną, koniecznością odtwarzania konturów obiektów na podstawie danych cząstkowych świadomie organizowanych. Dodatkowo mogło być powiązane z wyobrażeniem sobie procedury układania, czyli manipulowania figurą geometryczną.

Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Serwetki* przedstawia Wykres 19.



Wykres 19. Zadanie *Serwetki*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Z rozwiązaniem zadania – wskazaniem odpowiedzi D. 5 – poradziła sobie tylko połowa badanych uczniów. Odpowiedź E.4 była wskazana przez 36% uczniów. Najczęściej była ona wybierana przez uczniów, którzy w całym obszarze *wyobraźnia geometryczna* osiągnęli słabe i średnie wyniki, ale wskazywali ją też niektórzy uczniowie, którzy w tym obszarze osiągnęli wyniki wysokie. Być może wybierający odpowiedź E. nie liczyli celowo lub przypadkowo tej serwetki, która nie była przykryta przez żadną inną. Taka postawa mogła wynikać ze skupienia się na samej procedurze odtwarzania obiektów istniejących fragmentarycznie.

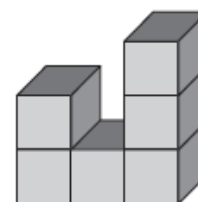
► **Zadanie *Budowla***

Liczby zapisane na podstawie informują o tym, ile kostek budowli, jedna na drugiej, należy ustawić na każdym z pól podstawki.

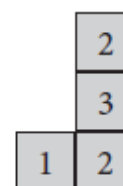
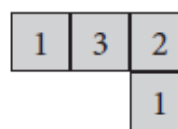
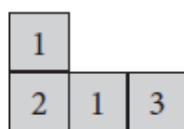
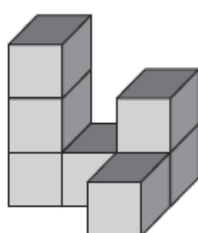
Jeśli na polach podstawki zapisano liczby:



To zgodnie z tą regułą należy ustawić na niej budowlę: →

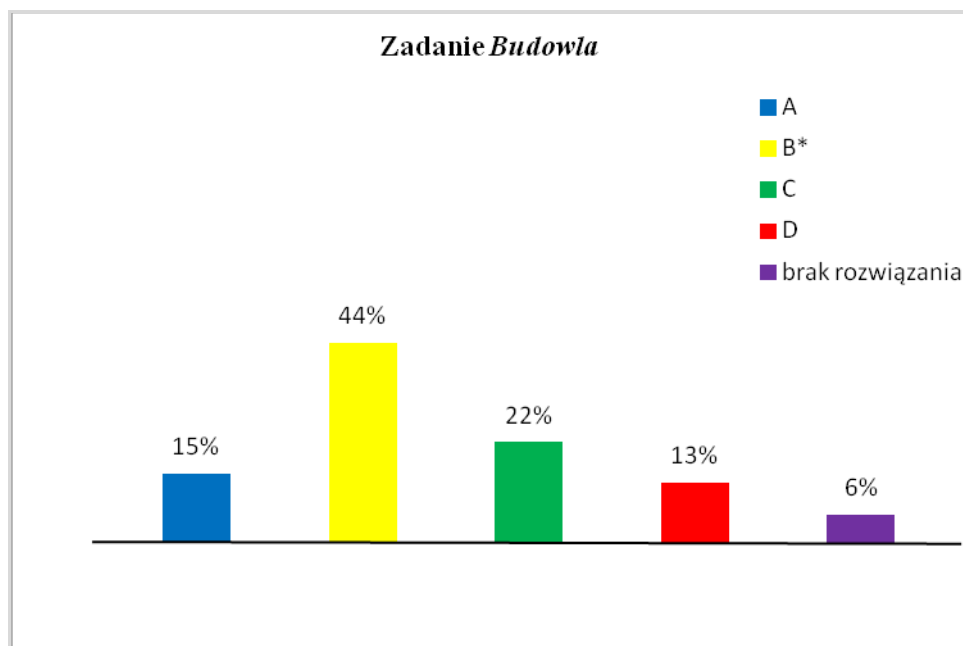


Na której podstawie można ustawić budowlę narysowaną poniżej?



Zadanie wymagało od ucznia rozumienia kodowania geometrycznego – przejścia między 2D i 3D – oraz wykonania w wyobraźni obrotu przedstawionej bryły. Z tego typu zadaniem trzecioklasiści najprawdopodobniej nie spotkali się w sytuacji szkolnej.

Na kolejnym wykresie przedstawiamy procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Budowla*.

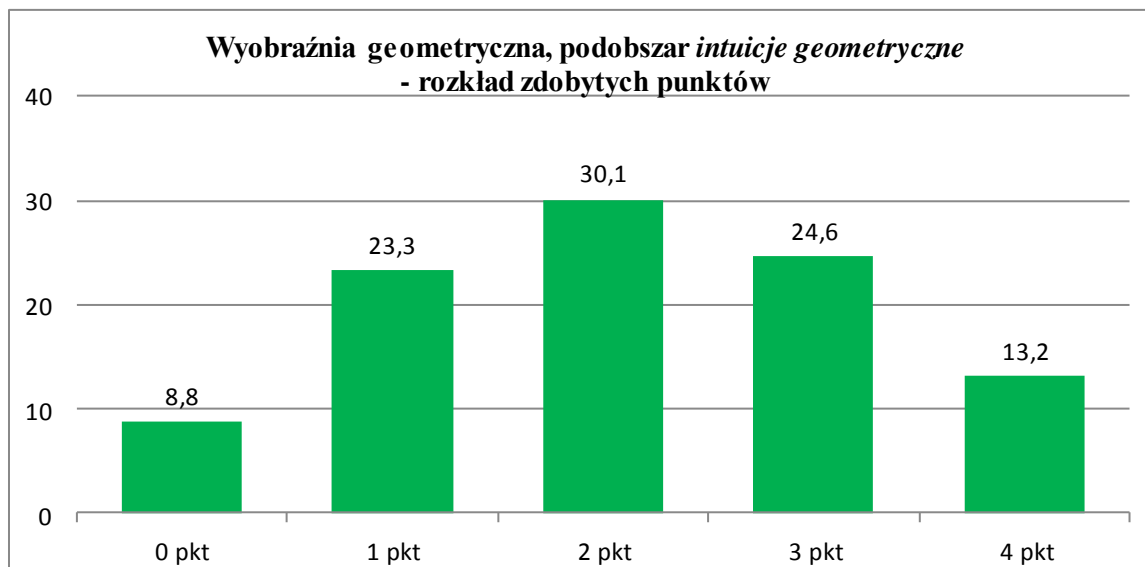


Wykres 20. Zadanie *Budowa*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Z poprawnym rozwiązaniem zadania *Budowa*, mimo że było dla uczniów nietypowe, poradziło sobie 44% badanych trzecioklasistów. Odpowiedź C. wskazało 22% uczniów. Ta odpowiedź była tak samo popularna wśród uczniów o słabych, średnich i wyższych niż średnie wynikach w obszarze *wyobrażenia geometryczna*. Być może wybierający tę odpowiedź uczniowie zasugerowali się głównie ustawieniem podstawki. Około 6% uczniów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

Podsumowanie wyników podobszaru *intuicje geometryczne*

W obszarze *wyobraźnia geometryczna*, w podobszarze *intuicje geometryczne*, każdy uczeń mógł uzyskać maksymalnie 4 punkty. Wykres 21. pokazuje procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez trzecioklasistów.



Wykres 21. Obszar *wyobraźnia geometryczna*, podobszar *intuicje geometryczne*. Procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów

Tylko 13% badanych trzecioklasistów rozwiązało poprawnie wszystkie cztery zadania z tego podobszaru. Połowa badanych rozwiązała poprawnie dwa lub trzy zadania. Ponad 30% badanych uczniów ma niedostatecznie wyrobioną intuicję geometryczną - to uczniowie, którzy rozwiązyali poprawnie co najwyżej jedno zadanie.

Warto zwrócić uwagę, że odsetek uczniów, którzy potrafią sobie wyobrazić figury na płaszczyźnie w zadaniu *Pieczątka* był niemal taki sam jak odsetek uczniów, którzy radzili sobie z wyobrażaniem figur przestrzennych w zadaniu *Budowla*. Zatem trudności dzieci w tych problemach wynikają głównie z nieumiejętności wyobrażenia sobie ruchu figury (w szczególności jej obrotu), a nie samej figury.

3.3.3. Podobszar *obliczenia w geometrii*

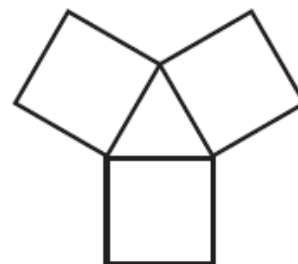
Opis podobszaru *obliczenia w geometrii*

Zadania z tego podobszaru pozwalały sprawdzić, w jakim stopniu uczniowie znają i rozumieją podstawowe na tym etapie edukacyjnym pojęcia geometryczne, typu długość boku figury czy obwód figury i na ile rozumnie się tymi pojęciami posługują.

Analiza wykonania zadań z podobszaru *obliczenia w geometrii*

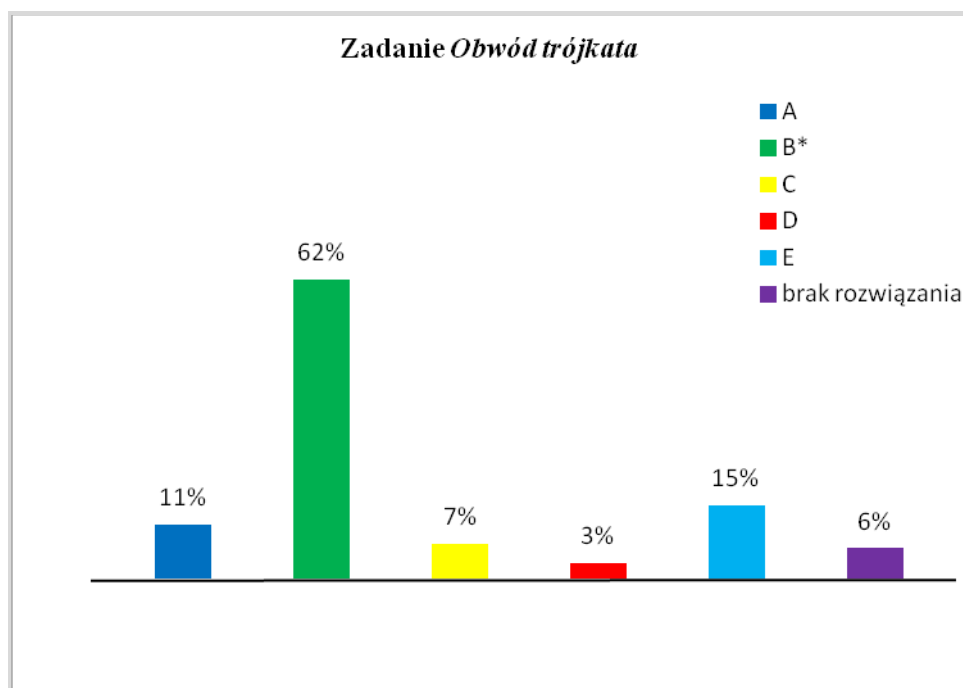
► Zadanie *Obwód trójkąta*

Figura na rysunku obok składa się z trzech kwadratów i trójkąta. Każdy kwadrat ma obwód 20 cm. Jaki obwód ma trójkąt?



- A. 5 cm B. 15 cm C. 20 cm
D. 45 cm E. 60 cm

Rozwiązanie zadania wymagało od ucznia uważnej analizy informacji podanych w treści, odniesienia do teoretycznej wiedzy o obwodach kwadratu i trójkąta równobocznego, a następnie przeprowadzenia prostego rozumowania. Dodatkowo badało rozumienie sensu rysunku, jako reprezentacji związków geometrycznych, a nie jako źródła danych liczbowych i wielkościowych. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Obwód trójkąta* przedstawia poniższy wykres.

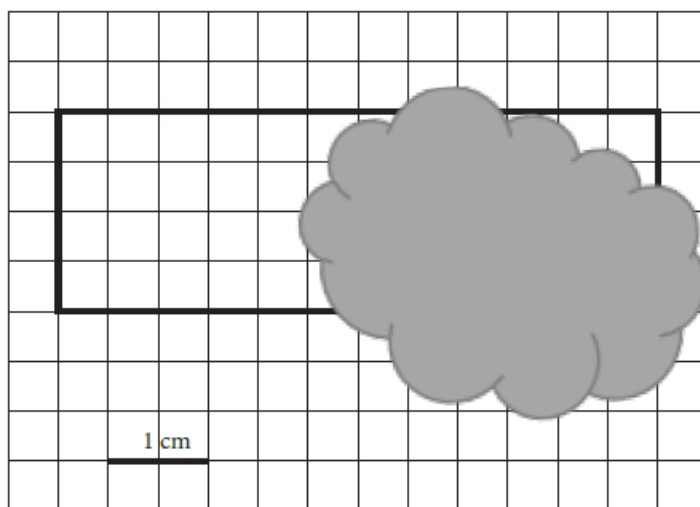


Wykres 22. Zadanie *Obwód trójkąta*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

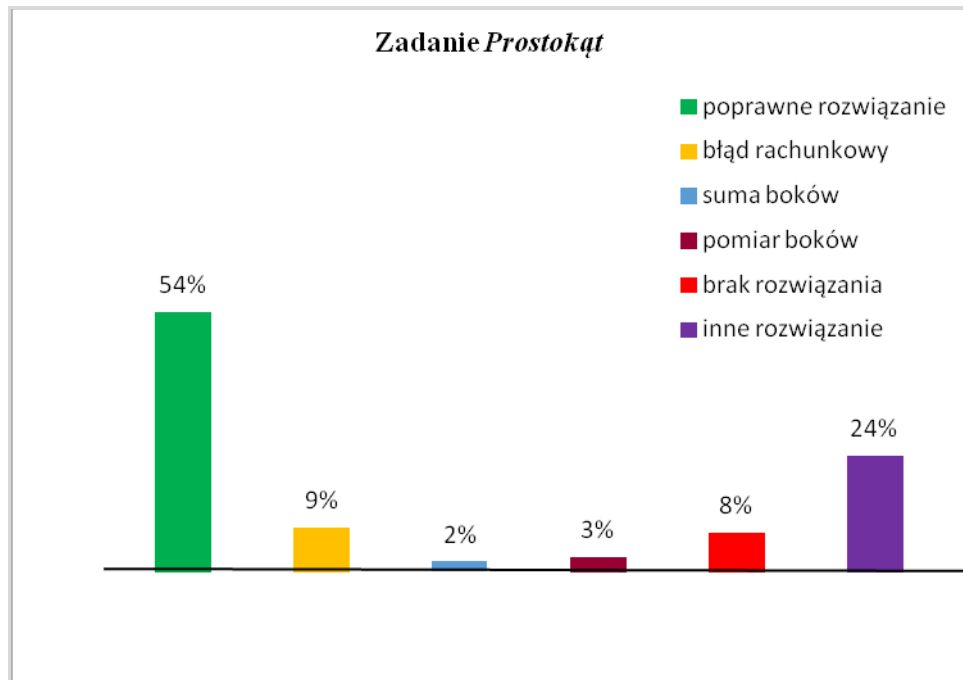
Poprawną odpowiedź wskazało 62% badanych uczniów. Największą popularnością wśród błędnych odpowiedzi cieszyła się odpowiedź E. 60. Wybrało ją 15% badanych. Wskazywali ją zarówno uczniowie, którzy w obszarze wyobraźni geometrycznej mieli najłabsze wyniki, jak i ci, którzy osiągnęli wynik średni, a nawet wyżej niż średni. Ten błąd wynika prawdopodobnie z nieuwważnego przeczytania tekstu zadania i potraktowania liczby 20 jako długość każdego z boków trójkąta i kwadratu. Odpowiedź A. 5 wybrało 11% uczniów. To najprawdopodobniej ci uczniowie, którzy obliczyli długość boku kwadratu i zaznaczyli ją, nie wracając już do pytania postawionego w zadaniu.

► **Zadanie *Prostokąt***

Jaki obwód ma prostokąt, którego fragment widać na rysunku poniżej?



Większość (73%) uczniów skorzystała z informacji zawartych na rysunku. Uznając za wiążące, że 2 kratki na rysunku oznaczają 1 cm. Jedna piąta uczniów rozwiązywała to zadanie używając linijki i dokonując własnych pomiarów boków prostokąta. Za poprawne uznawaliśmy każde rozwiązanie, w którym uczeń obliczył obwód prostokąta czy to dokonując pomiaru boków linijką czy też licząc kratki. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w zadaniu *Prostokąt* przedstawia wykres umieszczony niżej.

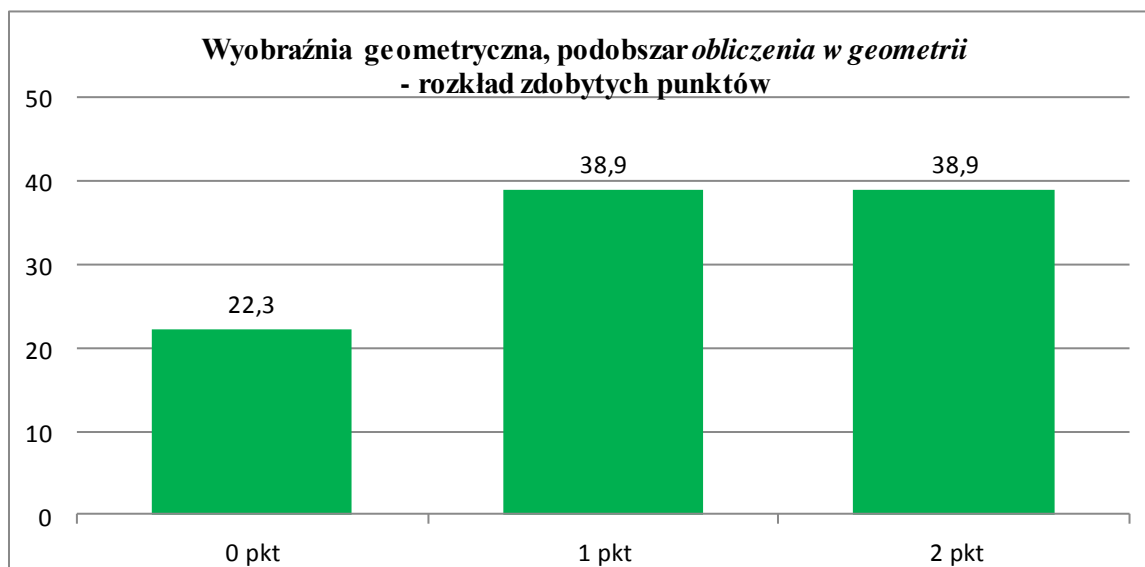


Wykres 23. Zadanie *Prostokąt*. Procentowy rozkład odpowiedzi uczniów.

Ponad 60% badanych uczniów potrafi prawidłowo wykorzystać pojęcie obwodu prostokąta i obliczyć obwód. Są w stanie funkcjonować na poziomie wyobraźniowym, wspierając się znanymi sobie własnościami prostokąta.

Podsumowanie wyników podobszaru *obliczenia w geometrii*

W obszarze *wyobraźnia geometryczna*, w podobszarze *obliczenia w geometrii*, każdy uczeń mógł uzyskać maksymalnie 2 punkty. Wykres 24. pokazuje procentowy rozkład punktów, uzyskanych przez trzecioklasistów.



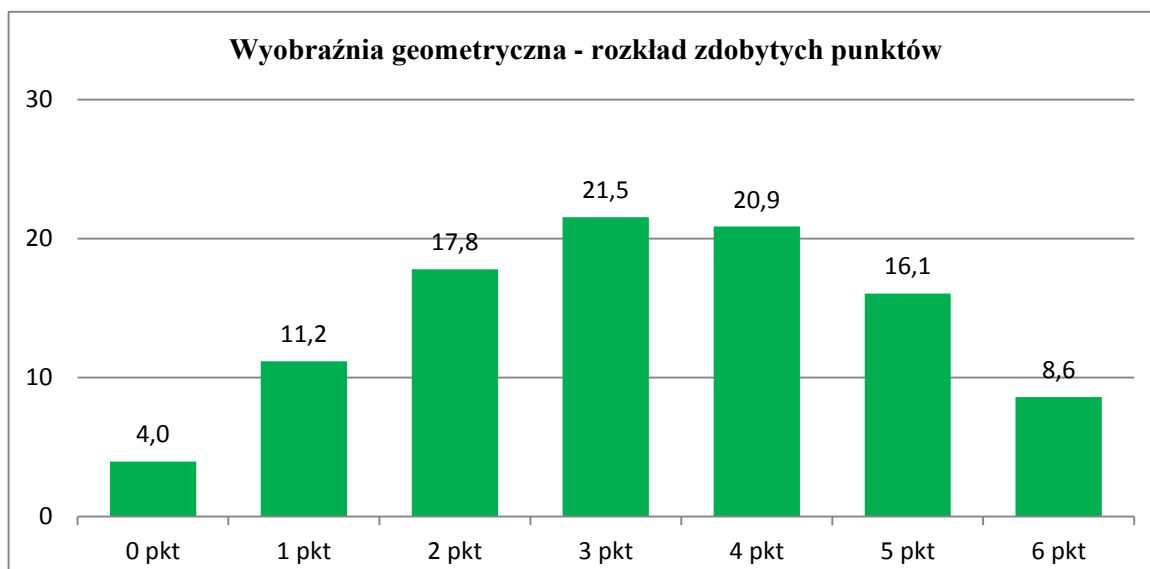
Wykres 24. Obszar *wyobraźnia geometryczna*, podobszar *obliczenia w geometrii*. Procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów.

Prawie 40% badanych trzecioklasistów rozwiązało poprawnie obydwie zadania z tego podobszaru. Ponad 20% badanych uczniów nie rozwiązało poprawnie żadnego z zadań tego podobszaru. Taki rozkład wyników wyraźnie wskazuje na duże mankamenty w kształceniu geometrycznym.

3.3.4. Podsumowanie wyników obszaru *wyobraźnia geometryczna*

Szczególną uwagę w badaniu K3 poświęciliśmy wyobraźni geometrycznej. Wykształcenie dobrych intuicji geometrycznych jest ważnym zadaniem na I etapie edukacyjnym. Bez nich nie jest możliwa skuteczna nauka geometrii w kolejnych klasach.

Wykres znajdujący się na kolejnej stronie pokazuje rozkład punktów uzyskanych przez badanych uczniów w tym obszarze.



Wykres 25. Obszar wyobrażenia geometryczna. Procentowy rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów.

Średni wynik w tym obszarze wynosi 3,2 punktu na 6 możliwych do uzyskania. Prawie 9% badanych uczniów rozwiązało poprawnie wszystkie zadania z tego obszaru, ale aż 15% poradziło sobie z rozwiązaniem co najwyżej jednego zadania. Najłatwiejszym zadaniem z tego obszaru było zadanie *Symetria*, a najtrudniejszym okazało się zadanie *Budowla*. Analizując wyniki zadań i błędy popełniane przez badanych trzecioklasistów można przypuszczać, że podczas zajęć edukacji matematycznej na I etapie edukacyjnym uczniowie niewiele czasu manipulują figurami płaskimi i przestrzennymi.

4. Podsumowanie

Wyniki badania *Kompetencje trzecioklasistów* mają służyć nauczycielom do analizowania niektórych umiejętności matematycznych ich uczniów. Arkusz badawczy zawierał zadania z trzech obszarów, ale obszarowi *wyobraźnia geometryczna* poświęcono więcej miejsca niż w innych badaniach. Wykształcenie dobrych intuicji geometrycznych jest ważnym zadaniem na I etapie edukacyjnym. Bez nich nie jest możliwa skuteczna nauka geometrii w kolejnych klasach.

W tym raporcie podajemy tylko średnie wyniki zadań, podobszarów i obszarów. Analizując raport warto pamiętać, że punkt za zadanie był przyznawany wtedy, gdy rozwiązanie zadania było całkowicie poprawne. Wyniki punktowe nie są jednak pełnym odzwierciedleniem tego, jak uczniowie radzili sobie z rozwiązywaniem postawionych przed nimi problemów. Aby nauczyciele mogli zobaczyć jak rozumują uczniowie, zachęcamy do uważnego przyjrzenia się przedstawionym przez nich rozwiązaniom i do rozmowy z nimi na temat tych rozwiązań. Ważna jest także analiza, jakiego rodzaju błędy były najczęściej popełniane.

Chcielibyśmy, aby taka uważna analiza nie tylko wyników, ale także uczniowskich rozwiązań zadań pomogła w diagnozie mocnych i słabych stron umiejętności matematycznych uczniów, skłoniła do refleksji nauczycieli i przyczyniła się do modyfikacji stylu nauczania matematyki na I etapie edukacyjnym.